Jakintza-arloa: Matematika

Estrukturalismotik funtzionalismora matematikaren barne oinarrietan

Egilea: **ENETZ EZENARRO ARRIOLA**

Urtea: 2013

Zuzendaria: JESUS MARI LARRAZABAL ANTIA

Unibertsitatea: UPV/EHU

ISBN: 978-84-8438-605-6

Hitzaurrea

Hau ez da matematikako tesi bat: lan honetan ez dugu emaitza matematiko berririk aurkeztuko. Ez eta matematikaren filosofiako tesi bat ere: ez gara matematikaren inguruko eztabaida ontologiko edo epistemologikoetan sartuko.

Izenburuan bertan aipatzen den moduan matematikaren barne oinarrietan kokatzen da gure ekarpena. Hizkuntza desberdinetan antzera gertatzen da (“foundations” ingelesez, “fondements” frantsesez, “fundamentos” gaztelaniaz, “grundlagen” alemanez) eta euskararen kasuan ere “oinarri”' hitza oso esplizitua da, jakintza arlo baten oinarriei buruz ari garelarik, jakintza arlo hori eraikuntza bat bailitzan “sostengatzen” duten kontzeptu eta prozedurak gogora ekartzerakoan. Jakintza arlo baten oinarriei buruz hitz egiteak jakintza arlo hori eraikuntza bat bezala egituratua dagoela pentsatzera garamatza, beraz. Eta kapitulu desberdinetan zehar ikusiko dugunez hori izan da matematikaren ikuspegi nagusia Euklidesen *Elementuen* garaitik. “Matematikaren oinarriak” diziplinak berak ere irudi horretatik hartzen du izena. Gure tesi nagusia izango da, ordea, gaur egungo matematikara nekez egokitzen den ikuspegia eskaintzen digula eraikuntzaren irudiak. Eta zentzu horretan “oinarri” terminoa ez dela egokiena ziur aski. Diziplinari lotutako terminoa bilakatu den heinean onartu eta erabiliko dugu, honenbestez, matematikaren “barne oinarriei” buruz ari garenean, eraikuntzaren kontzeptua asumitu beharrik ez dagoela hasieratik bertatik azpimarratuta. Aurrez beste batzuk egin izan duten moduan matematikari barrutik begiratuko diogu, nahi bada, metamatematika ez-hilbertiar bat proposatzeko. Proposamen honek estrukturalismotik funtzionalismorako bidea markatu nahi du *funtzionalismo estrukturalista* deitu duguna proposatuz, eta hau ez da sintesi artifizial bat: “funtzionalismoa” sustantiboa da eta “estrukturalismoa” adjektiboa. Eta beraz funtzioak dira, kontzeptu orokor bezala hartuta, guk aurkeztu nahi dugun matematikaren ikuspegia taxutuko duten nozio nagusiak, edo nahi bada, Bourbakiren terminoak erabiliz, printzipio ordenatzailea eskainiko dutenak. Estrukturek, beren aldetik, funtzioek lotzen dituzten matematikaren esparruei erreferentzia egiten diete, funtzio horiek neurri batean bederen ezaugarrituz.

Matematikaren oinarrien kuestioak logika eta matematikaren filosofiatik gertu kokatu izan ohi dira historikoki. Guk hitz egingo dugu tarteka kuestio hauetaz, batez ere, gure hariari jarraiki, esparru hauetan landu izan diren eztabaidetatik hurbil kokatzen garenean. Hala ere interesatuko zaizkigun ikuspuntu batzuk azaltzera mugatuko gara. Argi daukagu, ordea, matematikaren filosofian seriotasunez sartu nahi duen orok, guk hemen proposatzen dugunaren moduko matematikaren izaerari buruzko barrutik egindako hausnarketa batetik abiatu behar duela. Ez dago matematikaren filosofia egiterik aztertu nahi den matematika horren barruan sartu gabe.

Erabilitako metodologiari buruz pare bat ohar egin nahi genituzke. Matematikaren historiako pasarte desberdinak zehaztasun desberdinarekin deskribatu ditugu testuan, beti ere pasarte horiek aukeratzerakoan gogoan genituen ezaugarrietan sakonduz, gure posizioa indartzeko balioko dutelako ustean. Informazio historiko batetik abiatzeak, gaurko ikuspegiaren atzerabegirako proiekzioa egitearen arriskua dakarrela kontuan hartuta aritu gara, horrelakoak ekidin asmotan, momentu historiko bakoitzeko protagonistei berez ez zegokien ezer egoztetik apartatuz. Hala ere, horrek ez du kentzen hartzen diren teorien azterketa analitikoa egiterakoan, hauen irismena ebaluatzeko gaur egungo tresneriaren bidezko interpretaziorik egin ahal izatea. Hala egin dugu guk bereziki sakonkien aztertu ditugun adibideen kasuan: Galois eta Kleinen lanei dagokienean.

Hiru kapitulutan banatu dugu lana. Lehenbizikoan matematikaren oinarrien arloa kokatu dugu. Gödelen ez-osotasun teoremek matematikari kanpotik segurtasun eskemarik eskaintzeko ezintasuna agerian jarri ostean, matematikaren “barrukoak” diren teorien antolaketa eta artikulazio kontzeptualaren, nahiz matematika bera ikusteko moduaren inguruko kuestioen errelebantzian zentratuz eta zenbait adibide historiko labur aurkeztu dugu. Barne oinarrien gaiari tiraka, bigarren kapituluan, estruktura algebraikoen sorrera aztertu dugu eta multzo teoria eta metodo axiomatikoarekin batera estrukturalista deitu daitekeen Bourbakiren matematikaren ikuspegia noraino iristen den ebaluatzen ahalegindu gara. Bourbakiren eraikuntzaren matematikaren ikuspegi estrukturalista gaur egungo matematikarako motz geratzen dela ondorioztatuta, hirugarren kapituluan, estrukturalismo kategoriala esaten zaiona (funktoriala) aztertu ondoren, Kleinen Erlangen programa eta topologia algebraikoan inspiratuta, gaur egungo matematikaren izaera karakterizatzeko modu orokor batean ulertutako funtzio kontzeptuak izan dezakeen garrantzia azpimarratzen duen proposamen bat luzatu dugu: *funtzionalismo estrukturalista* deitu duguna. Ikuspegi honen arabera estrukturatutako esparru desberdinen arteko informazio fluxua bideratzen duten erlazio funktorialen “grafo”' ebolutibo bat bezala uler daiteke gaurko matematikaren zati bat bederen. Grafo horren azterketak eman diezaguke matematikaren batasunaren eta antolaketaren berri, osotasunean ez bada ere, zati nagusi batzuetan bederen.

Etorkizunean *funtzionalismo estrukturalistaren* proposamenaren ildoan sakontzeko asmoa daukagu. Egindako proposamenak nahikoa oinarri baduela uste izan arren argi daukagu bide horretan dena edo ia dena egiteko dagoela. Matematikaren “grafoaren” azterketa metamatematikoari lotuta aurreikusten ditugun galdera batzuk honakoak izan daitezke: zein da algebraren paper berezia “grafoaren” konfigurazioan, zein dira “grafoan” momentu ebolutibo bakoitzean nodorik garrantzitsuenak eta zein solte edo gutxi erlazionatuta dauden nodoak, zein diren erlazio funktorial emankorrenak eta zein den garai bakoitzean eboluzioaren esplikaziorik onena eskain dezakeen teoria.

Amaitzeko lan honi dagokixozenak osatzen ibili naizen artian euren laguntasuna eskeini dienei nere esker ona erakutsi nahi niueke. Lehenengo eta batez ere Jesus Mari Larrazabali logikan eta matematikan oinarrixetan urrats sendoz barneratzen laguntziagatik, baina ez horregatik bakarrik jakina. Bigarrengo Alain Ulaziari hainbeste urtian sufrittutako eta beste inori interesatuko ez litzakixozen hizketaldixengatik. Hirugarrengo ILCLIko jendiari lanerako giro ona sortzen laguntziagatik. Laugarrengo EHU-ko liburutegixetako langilliei biharrezko nittuan dokumentuak lortzerakuan emandako erreztasunengatik. Laugarrengo amari, anaixei eta etxekuei, bakoitza bere erara, beti hor egotiagatik. Bosgarrengo gaur falta badira ere nere bizitzan ezinbestekuak izan dian horrei. Eta azken orduan ixil-ixilik nere maitte politteri: Anitzi eta Lizarri, bizipozagatik; Idoiari, guztiagatik.

Enetz Ezenarro, 2016

Estrukturalismotik Funtzionalismora matematikaren barne oinarrietan

Gure aita zanari

Gaien Aurkibidea

Hitzaurrea

Hau ez da matematikako tesi bat: lan honetan ez dugu emaitza matematiko berririk aurkeztuko. Ez eta matematikaren filosofiako tesi bat ere: ez gara matematikaren inguruko eztabaida ontologiko edo epistemologikoetan sartuko.

Izenburuan bertan aipatzen den moduan matematikaren barne oinarrietan kokatzen da gure ekarpena. Hizkuntza desberdinetan antzera gertatzen da ("foundations" ingelesez, "fondements" frantsesez, "fundamentos" gaztelaniaz, "grundlagen" alemanez) eta euskararen kasuan ere "oinarri" hitza oso esplizitua da, jakintza arlo baten oinarriei buruz ari garelarik, jakintza arlo hori eraikuntza bat bailitzan "sostengatzen" duten kontzeptu eta prozedurak gogora ekartzerakoan. Jakintza arlo baten oinarriei buruz hitz egiteak jakintza arlo hori eraikuntza bat bezala egituratua dagoela pentsatzera garamatza, beraz. Eta kapitulu desberdinetan zehar ikusiko dugunez hori izan da matematikaren ikuspegi nagusia Euklidesen *Elementuen* garaitik. "Matematikaren oinarriak" disziplinak berak ere irudi horretatik hartzen du izena. Gure tesi nagusia izango da, ordea, gaur egungo matematikara nekez egokitzen den ikuspegia eskaintzen digula eraikuntzaren irudiak. Eta zentzu horretan "oinarri" terminoa ez dela egokiena ziur aski. Diziplinari lotutako terminoa bilakatu den heinean onartu eta erabiliko dugu, honenbestez, matematikaren "barne oinarriei" buruz ari garenean, eraikuntzaren kontzeptua asumitu beharrik ez dagoela hasieratik bertatik azpimarratuta. Aurrez beste batzuk egin izan duten moduan matematikari barrutik begiratuko diogu, nahi bada, metamatematika ez-hilbertiar bat proposatzeko. Proposamen honek estrukturalismotik funtzionalismorako bidea markatu nahi du *funtzionalismo estrukturalista* deitu duguna proposatuz, eta hau ez da sintesi artifizial bat: “funtzionalismoa” sustantiboa da eta “estrukturalismoa” adjektiboa. Eta beraz funtzioak dira, kontzeptu orokor bezala hartuta, guk aurkeztu nahi dugun matematikaren ikuspegia taxutuko duten nozio nagusiak, edo nahi bada, Bourbakiren terminoak erabiliz, printzipio ordenatzailea eskainiko dutenak. Estrukturek, beren aldetik, funtzioek lotzen dituzten matematikaren esparruei erreferentzia egiten diete, funtzio horiek neurri batean bederen ezaugarrituz.

Matematikaren oinarrien kuestioak logika eta matematikaren filosofiatik gertu kokatu izan ohi dira historikoki. Guk hitz egingo dugu tarteka kuestio hauetaz, batez ere, gure hariari jarraiki, esparru hauetan landu izan diren eztabaidetatik hurbil kokatzen garenean. Hala ere interesatuko zaizkigun ikuspuntu batzuk azaltzera mugatuko gara. Argi daukagu, ordea, matematikaren filosofian seriotasunez sartu nahi duen orok, guk hemen proposatzen dugunaren moduko matematikaren izaerari buruzko barrutik egindako hausnarketa batetik abiatu behar duela. Ez dago matematikaren filosofia egiterik aztertu nahi den matematika horren barruan sartu gabe.

Erabilitako metodologiari buruz pare bat ohar egin nahi genituzke. Matematikaren historiako pasarte desberdinak zehaztasun desberdinarekin deskribatu ditugu testuan, beti ere pasarte horiek aukeratzerakoan gogoan genituen ezaugarrietan sakonduz, gure posizioa indartzeko balioko dutelako ustean. Informazio historiko batetik abiatzeak, gaurko ikuspegiaren atzerabegirako proiekzioa egitearen arriskua dakarrela kontuan hartuta aritu gara, horrelakoak ekidin asmotan, momentu historiko bakoitzeko protagonistei berez ez zegokien ezer egoztetik apartatuz. Hala ere, horrek ez du kentzen hartzen diren teorien azterketa analitikoa egiterakoan, hauen irismena ebaluatzeko gaur egungo tresneriaren bidezko interpretaziorik egin ahal izatea. Hala egin dugu guk bereziki sakonkien aztertu ditugun adibideen kasuan: Galois eta Kleinen lanei dagokienean.

Hiru kapitulutan banatu dugu lana. Lehenbizikoan matematikaren oinarrien arloa kokatu dugu. Gödelen ez-osotasun teoremek matematikari kanpotik segurtasun eskemarik eskaintzeko ezintasuna agerian jarri ostean, matematikaren "barrukoak" diren teorien antolaketa eta artikulazio kontzeptualaren, nahiz matematika bera ikusteko moduaren inguruko kuestioen errelebantzian zentratuz eta zenbait adibide historiko labur aurkeztu dugu. Barne oinarrien gaiari tiraka, bigarren kapituluan, estruktura algebraikoen sorrera aztertu dugu eta multzo teoria eta metodo axiomatikoarekin batera estrukturalista deitu daitekeen Bourbakiren matematikaren ikuspegia noraino iristen den ebaluatzen ahalegindu gara. Bourbakiren eraikuntzaren matematikaren ikuspegi estrukturalista gaur egungo matematikarako motz geratzen dela ondorioztatuta, hirugarren kapituluan, estrukturalismo kategoriala esaten zaiona (funktoriala) aztertu ondoren, Kleinen Erlangen programa eta topologia algebraikoan inspiratuta, gaur egungo matematikaren izaera karakterizatzeko modu orokor batean ulertutako funtzio kontzeptuak izan dezakeen garrantzia azpimarratzen duen proposamen bat luzatu dugu: *funtzionalismo estrukturalista* deitu duguna. Ikuspegi honen arabera estrukturatutako esparru desberdinen arteko informazio fluxua bideratzen duten erlazio funktorialen "grafo" ebolutibo bat bezala uler daiteke gaurko matematikaren zati bat bederen. Grafo horren azterketak eman diezaguke matematikaren batasunaren eta antolaketaren berri, osotasunean ez bada ere, zati nagusi batzuetan bederen.

Etorkizunean *funtzionalismo estrukturalistaren* proposamenaren ildoan sakontzeko asmoa daukagu. Egindako proposamenak nahikoa oinarri baduela uste izan arren argi daukagu bide horretan dena edo ia dena egiteko dagoela. Matematikaren "grafoaren" azterketa metamatematikoari lotuta aurreikusten ditugun galdera batzuk honakoak izan daitezke: zein da algebraren paper berezia "grafoaren" konfigurazioan, zein dira "grafoan" momentu ebolutibo bakoitzean nodorik garrantzitsuenak eta zein solte edo gutxi erlazionatuta dauden nodoak, zein diren erlazio funktorial emankorrenak eta zein den garai bakoitzean eboluzioaren esplikaziorik onena eskain dezakeen teoria.

Amaitzeko lan honi dagokixozenak osatzen ibili naizen artian euren laguntasuna eskeini dienei nere esker ona erakutsi nahi niueke. Lehenengo eta batez ere Jesus Mari Larrazabali logikan eta matematikan oinarrixetan urrats sendoz barneratzen laguntziagatik, baina ez horregatik bakarrik jakina. Bigarrengo Alain Ulaziari hainbeste urtian sufrittutako eta beste inori interesatuko ez litzakixozen hizketaldixengatik. Hirugarrengo ILCLIko jendiari lanerako giro ona sortzen laguntziagatik. Laugarrengo EHU-ko liburutegixetako langilliei biharrezko nittuan dokumentuak lortzerakuan emandako erreztasunengatik. Laugarrengo amari, anaixei eta etxekuei, bakoitza bere erara, beti hor egotiagatik. Bosgarrengo gaur falta badira ere nere bizitzan ezinbestekuak izan dian horrei. Eta azken orduan ixil-ixilik nere maitte politteri: Anitzi eta Lizarri, bizipozagatik; Idoiari, guztiagatik.

1 Matematikaren oinarriak

Ez da erraza matematikaren oinarria zerk osatzen duen esatea. Ez hori bakarrik, "matematikaren oinarri izatea" espresioak adierazten duena, bera, historikoki modu desberdinean ulertu izan da [Ferreiros 2005]. Shapirok [Shapiro 2004], adibidez, matematikak oinarritze desberdinak izan ditzakeela esaten du, honek ez daukala zertan, izatekotan, bakarra izan. Oinarritzea zertarako den jakin beharko genukeela, proposamen bat edo beste bat hobesteko orduan.

Esaterako, matematikarien artean gehien zabaldutako ikuspegiaren arabera, multzo teoria izango litzateke matematikaren oinarria, ZFC edo antzerakoren bat. Hau horrela da, Kunenen[Kunen 2010] hitzetan, batetik "kontzeptu matematiko abstraktu guztiak multzo teoriazkoak direlako", eta bestetik "objektu matematiko konkretu guztiak multzoak direlako". Funtzio bat adibidez, modu informalean, x balio bakoitzari y balio bat egokitzen dion erregela bezala uler daitekeena, zehaztasunez definitu nahi bada, funtzioa bere grafoarekin identifikatuz lortu daiteke hau. Bide honetatik f funtzio bat izango da, (x, y) bikote ordenatuen multzo bat baldin bada, x elementu bakoitzarentzat y elementu bakarra existitzen delarik $(x, y) \in f$ izanik. Hau izan ohi da kuestio filosofikoen inguruko ardura gutxi izan ohi duten matematikarien posizioa[1].

[1] The working mathematician is a Platonist on weekdays, a formalist on weekends. Ik. [Hersh 1997, 39. or.]

Badira multzo teoria matematikaren oinarritzat hartuz, kuestio filosofikoetan ardura handiagoa jartzen duten posizioak: Maddyren *naturalismoa* esaterako[2]. Maddyren arabera, multzo teoriaren ekarpen handia, objektu matematiko eta estruktura matematikoen instantziazio bakoitzarentzako ordezko eredu homogeneoak eskaintzean datza, matematikoki errelebanteak diren ezaugarri guztiak jasotzen dituztenak, eta beraz, hauen arteko erlazio eta elkarrekintzak aztertu eta argitzeko esparru egokia eskainiz. Aurreko paragrafoan emandako adibideari erreferentzia eginez Maddyrentzat garrantzitsuena ez da funtzioak multzoak diren edo ez jakitea, multzoen bidez funtzioen ezaugarri matematikoak jaso eta lantzeko aukera izatea baizik. Eta funtzioentzat bezala gainontzeko objektuentzat. Hori da multzo teoria matematikaren oinarritzat postulatzearen arrazoia.

Baina Shapiroren hariari jarraituz, matematikaren oinarritzeak ez dira soilik ikuspegi matematiko huts batetik kontsideratu izan. Beste arrazoi batzuetarako matematikaren oinarritzeak ere bilatu izan dira. Hain zuzen ere, matematikaren oinarritze ontologikoaz eta epistemologikoaz hitz egiten du Shapirok, aipatutako matematikoaz gain. Azken bi hauek interes matematiko handirik ez izan arren, matematikaren filosofiarako garrantzitsuak izan daitezke[3]. Eta matematikaren filosofiak ba al du garrantziarik matematikarako? Shapiro beraren hitzak hartuko ditugu, beste behin, galdera honen inguruan guk daukagun posizioa azaltzeko:

> Kasurik onenean, matematikaren filosofia matematikaren zerbitzari apal bat da. Eginkizunen bat izatekotan, momentu horretara arte praktikatu den moduaren araberako matematikaren azalpen koherente bat ematea izango da... Deitu honi *filosofia-izatekotan-ere-azkena* printzipioa.[4]

[2]Ikusi [Maddy 1997].

[3]Honetan ere, nola ez, ez datoz guztiak bat.

[4]At the best, philosophy of mathematics is an unworthy handmaiden to mathematics. If it has a job at all, is to give a coherent account of mathematics as practised up to that point... Call this the *philosophy-last-if-at-all* principle. [Shapiro 2000, 14. or.].

Tesiaren izenburuak matematikaren oinarrien inguruko bereizketa honekin bat egiten du neurri handi batean “matematikaren *barne* oinarriei” buruz hitz egiten duenean. Matematikaren barne oinarritzearen arazoa matematikaren garapenean modu naturalean ematen den prozesu bat bezala definitzen ahaleginduko gara lehenbiziko kapitulu honetan, segidan prozesu horren baitan kokatu ditugun eta bereziki esanguratsuak iruditu zaizkigun adibideak aztertzeko.

Hori egin baino lehen ordea, hasieran aipatutako “matematikaren oinarrien inguruko krisia” bezala ezagutu den XX. mende hasierako eztabaidari errepaso bat emango diogu, hein handi batean matematikarien arteko eztabaida bat izanagatik, argi baitago, hein beretsuan, matematikaz kanpoko ardurek (ardura filosofikoek, gehienbat) gidatutako eztabaida bat izan zela, eta azken finean, matematikarien gehiengo zabal batek, “krisi” hitzari legokiokeen inolako eraginik ez zuela sumatu. Hitz lauz esanda, filosofo eta logikariak ez bezala, matematikari gehienak ez ziren “enteratu ere egin” krisi horretaz. Horrek ez dio kentzen, noski, matematikaren filosofiarako eta bereziki, logikarako, guztiz eztabaida zentrala suertatu izana [Van Heijenoort 1967]. Alde batetik Fregeren *Begriffsschrift* [Frege 1879] notazio kontzeptualak lehen mailako predikatuen logikarentzat ekarritako kalkulu formalagatik beste alde batetik Peanok aritmetikarentzat egindako axiomatikaren bidetik Russellek logikarentzat egindako axiomatikagatik eta Hilberten metamatematikari hasiera emateagatik, eta azkenik, zer esanik ez, logikan aurki ditzakegun emaitza garrantzitsuenetakoengatik: Gödelen bi ez-osotasun teoremak[5], hain zuzen ere. Neurri handi batean eztabaidari amaiera jarri zieten emaitza hauek, ikusiko dugun moduan.

[5] Kontraesankorra irudi dezake, matematikarako zuen irrelebantzia, logikarako izan zuen errelebantziari kontrajartzea. Are gehiago, gaur egun logika matematikoak, sorrerako eztabaida fundamentistetatik urrunduta matematikaren baitako adar zilegia irudi dezakeenean.

1.1 Matematikaren kanpo oinarriak

1.1.1 Matematikaren filosofia

Filosofia eta matematikaren arteko loturak aintzinakoak dira. Aintzinako greziarrak izan ziren bi esparruetan lehenbizikoz sistematikotasuna, zorroztasuna eta justifikazioaren garrantzia barneratu zituztenak. Hala ere, hasiera batean harrigarria irudi dezake filosofiak denbora guzti honetan zehar erakutsi duen matematikaganako interesak. Filosofia, izan ere, eguneroko bizitzatik eratorritako oinarrizko kuestioetaz arduratu izan den gogoeta baita (ezagutzaren eta moralaren esparruetatik ontologiara jo duenakon), eta matematika aitzitik, azterketa esparrurik abstraktuena eta nolabait, eguneroko giza-jardunetatik urrunduena kontsideratua izan dena. Zergatik, beraz, filosofia matematikaz arduratu?

Arrazoi posible bat ondokoa izan daiteke: egitate matematikoen ezagutza, pertzepzio fisikoarekin eta beraz, esperientziarekin loturarik gabe, arrazonamendu hutsean justifikatzen deneko ustea. Uste horretatik erator daiteke matematikaren azterketa filosofiko batek filosofiarentzako zentrala izan den pentsamendu arrazionalaren izaerari buruzko ondorio garrantzitsuak atera daitezkeelako itxaropena. Pentsamendu kontzeptualak erabat baldintzatzen eta egituratzen du gizakion bizitza, eta beste edozerengandik bereizten du. Eta hain zuzen ere, matematika da pentsamendu kontzeptualaren emaitzarik behinena. Ikusi dezagun, labur bada ere, zer nolako kuestio filosofikoak sortu izan diren matematikaren inguruan, matematikaren filosofiaren hasierako perspektiba bat izan dezagun.

Ezagutza matematikoa jasotzeko moduari buruzkoa izan daiteke horietako bat. Filosofoek *a posteriorizko* eta *a priorizko* ezagutzak bereizten dituzte. Lehenbizikoak zentzumenen bidezko esperientzia eskatzen du kontzeptuak osatzeko eta justifikatzeko, eta bigarrenak, aldiz, ez. Proposizio bat *a priori* edo *a posteriori* ezagutzen den determinatzeko, proposizioaren justifikazioa oinarritzen den ebidentzia klasea aztertu behar dugu; eta bereziki ebidentzia horietakoren bat zentzumenen bidezko esperientzian oinarrituta dagoen aztertu. Horren gainean defenditzen da matematikaren emaitzak a priori ezagutzen ditugula eta mundu fisikoari buruzkoak a posteriori. Adibidez, zenbaki lehenen zerrenda amaigabea dela dakigu, ez neurketarik edo behaketarik egin dugulako, hausnarketa hutsean oinarrituta baizik. Ezagutza hau lurrak eguzkiaren inguruan biratzen duenaren oso bestelakoa da, *a posteriorizkoa* dena eta behaketaren bat egin gabe justifikaezina izango litzatekeena. Edonola ere, gauzak ez daude hain argi ez filosofoentzat eta ez matematikarientzat.

Ezagutza matematikoari buruzko ikuspegi honek *enpirismoarekin* talka egiten du. Enpirismoa, gure ezagutza oro, azken finean, zentzumenen bidezko esperientzian oinarrituta justifikatzen dela dioen eragin handiko aspaldiko doktrina bat da. Eta zentzu askotan doktrina onargarria da, gainera. Nola jasoko dugu, bada, kanpoko munduari buruzko ezagutza, honek guregan nolabait eragin gabe? Gure informazio bide guztiak bost zentzumenen bidezkoak diren heinean, badirudi munduari buruzko ezagutza oro hauen bidez jasotako inpresioen gainean justifikatu beharrekoa dela.

Matematikari eta filosofo batzuek *platonismo* deitu izan den matematikaren ikuskeran bilatu izan dute arazo honen irtenbidea. Matematikak munduari buruzko ezer ez digula esaten onartzen bada, orduan ezagutza matematikoaren *a priorizko* izaera eta enpirizismoaren arteko talka eragoztea lortzen da. Enpirismoa, azken batean, munduari buruzko ezagutza justifikatzeko moduak motibatua baita. Baina aipatutako talka eragoztearen prezioa ez da txikia kasu honetan. Berehala sortzen den galdera baita, munduari buruzkoa ez bada, matematika zeri buruzkoa den. Galdera honi platonismoak ematen dion erantzunaren arabera, mundua bezalaxe, gugandik modu independentean, baina aurrekoa ez bezala, espazio-denboratik kanpo kokatutako mundu bati buruzkoa da matematika.

Platonismoaren baitan badira mundu abstraktu hau ezaugarritzeko bi modu.

Lehenbizikoa, *platonismo ontologikoa* deituko duguna, aipatutako mundu horretako entitateak deskribatzeaz arduratzen da. Honen arabera objektuok ez daude espazio-denboran kokatuak eta ondorioz ez daukate indar kausalik. Zentzu askotan onargarria dirudi hau esateak, adibidez, zenbaki arruntak infinituak izanik, denboran eta espazioan kokatutako materia zatiekin identifikatzea ezinezkoa baita, mundu fisikoaren infinitutasuna onartu gabe.

Bada, esan bezala, platonismoaren bigarren bertsio bat, *platonismo doxastikoa* deitu dezakeguna, eta mundu matematikoa karakterizatzeko beste modu bat eskaintzen duena. Platonismoaren bertsio honek mundu abstraktu horri buruzko egiak eta guk uste dugunaren arteko erlazioak deskribatzen ditu. Matematika gure gogoekiko independentea dela esaten du platonismo doxastikoak, hau da, proposizio matematiko bat justifikatua egoteak ez duela guk pentsatzen dugunarekin zer ikusirik. Esaterako, zenbaki lehenen infinitutasunak ez dauka zerikusirik inork horretaz pentsa dezakeenarekin. Ez da egia gure gogoak modu jakin batean, eta ez beste batean, eraikiak daudelako, errealitate matematikoa horrela eraikia dagoelako baizik. Azken batean, matematika ez dugula guk "sortzen", "aurkitu" egiten dugula.

Platonismoari plantea dakiokeen arazo bat, entitate abstraktuetaz hitz egitea, *a priorizko* ezagutza emateko moduaren azalpen bat baino, benetan, honi jartzen zaion etiketa bat baino ez ote den galdetzea litzateke. Azaldu gabe jarraitzen baitu, platonismoaren baitan, espazio-denboran kokatutako izakiak baino ez garenok, nola jaso dezakegun muga hauetatik kanpo kokatutako entitateei buruzko informaziorik. Gure pentsamenduak, kausalitate guztietatik libre den mundu independente horretarako sarbide zuzena eskaintzen digula esatea, berriz ere, arazoari ihes egitea baino ez bailitzateke.

Bada beste aspektu bat, platonismoaren tesiak zuzenak izatekotan, argitasuna eskatzen duena. Hau da, matematika errealitate ez-fisiko bati buruzkoa izanda ere, ezagutza matematikoa errealitate fisikora hain *aplikagarria* izatearen arrazoia zein den aurkitzea. Zergatik da matematika fenomeno naturalak esplikatu eta aurresaterakoan hain erabilgarria?[6] Zentzu honetan, platonisten balizko entitate abstraktuez osatutako mundu independente hori onartzeak, matematikaren erabilgarritasunaren azalpena zailagoa bihurtuko lukeela dirudi.

Platonismoaren bidea nekeza iruditu gero beti dago, enpirismoa ezagutza matematikoaren *a priorizko* izaerarekin bateragarri bihurtzeko ahalegina albo batera lagata, ezagutza matematikoa azken finean, *a posteriorizkoa* ez ote den galdetzeko aukera. Eta saiakerak egon diren arren, lehen ere ikusi dugu, egia matematikoek ez diruditela behaketa enpirikoekin justifikagarriak. Gainera justifikazioaren gaiak beste puntu arantzatsu bat dakarkigu eskuartera. Matematikan justifikaziotzat hartzen denak, beste zientzietan hartzen den ohiko bidearengandik arras desberdina dirudi. Justifikazioaren beraren izaera ez dator bat matematikan eta zientzia enpirikoetan. Azken hauetan inferentziak induktiboak edo estatistikoak izan ohi dira sarritan, hau da, justifikaziorako kontuan hartzen diren premisen egiazkotasunak ez du ondorioen egiazkotasuna bermatzen, behartzen; hauek maila batean edo bestean probableak direla baino ez du esaten, eta beraz inferentziek ez dute proposizioen egiazkotasuna kontserbatzen. Matematikan gauzak ez dira horrela. Justifikazio matematikoetako, hau da, frogetako, inferentziak guztiak dira *zuzenak*: erabilitako premisen egiazkotasunak ondorioaren egiazkotasuna beharrezkoa egiten du. Bestela esanda, ez da posible premisak egia izanik ondorioa faltsua izatea. Justifikazioaren izaera desberdindu honek ere zailtasunak dakarzkio perspektiba enpirizistari.

Matematikaren filosofiaren arazo eta galdera batzuk aurkeztu ditugu ildo tradizionalari jarraituz, honenbestez, alor honen nondik norakoei antza emateko balio dezaten. Betiko planteamendu batzuk baino ez ditugu ikutu, eta gaur egun matema-

[6]Ezaguna da Steven Weinberg fisikariak puntu honen inguruan egin zuen iruzkina: "It is positively spooky how the physicist finds the mathematician has been there before him or her." [Weinberg 1986].

tikaren filosofian egiten denaren laginik ere ez dugu gurera ekarri, oraingoz. Aurrerago izango dugu estrukturalismoari buruz hitz egiten dugunean, posizio eta eztabaida gaurkotuagoen inguruan jarduteko denborarik. Orain, ordea, matematikaren kanpo oinarrien inguruko eztabaidari helduko diogu.

1.1.2 Fregeren eta Russellen logizismoa

Greziarrek Euklidesen Elementuetako V. kapituluan aurkeztuta datorren Eudoxoren ratio eta proportzionaltasunaren teoriaren bidez erantzun zioten magnitude neurtezin edo inkonmentsurableen aurkikuntzari. Kantitate diskretuak (zenbakiak) eta kantitate jarraituak (magnitudeak) ondo bereiztuta zetozen teoria honetan, Matematika kantitatearen eta magnitudearen zientzia bezala ikusteko tradizioari hasiera emanez. Aipatu Eudoxoren teorian ez dira magnitudeak eta hauen arteko ratioak zenbakizko entitate zilegiak bezala hartzen, modu geometrikoago batean baizik (luzera, azalera, bolumen, angelu eta hauen arteko erlazio bezala, azken batean). Are gehiago, ratioen berdintzarako irizpide kontestual bat ematen bada ere, ratioen definizio espliziturik ez dator, entitate independente bezala kontsideratuko ez balira bezala. Teoriaren aplikazio praktikoei dagokienean ez dauka honek eragin handirik, eta horregatik seguruenez ez ziren kontzeptuak bere horretan izan zezakeen garrantziaz jabetu. Baina ekuazio aljebraiko desberdinen soluzioak kontsideratzean, barne mailako tentsio matematikoak sortzen ziren, soluzio batzuk zenbakizkoak eta beste batzuk, aldiz, greziarren bereizketari jarraituz, geometrikoki baino interpretatu ezinak izaterakoan. XVII. mendean geometria kartesiarraren agerpena izan zen, nolabait, tentsio hauek sortzen zuten ezinegona areagotu zuena, ordura arte ezaguna zen geometriaren zati handi bat aljebrara, ekuazioetara, eraman zitekeela erakutsiz. Beharrezkoa zen greziarren garaitik desberdintzen ziren kantitate eta magnitudea bateratuko zituen zenbakien teoria orokorrago bat. XIX. mende amaiera arte ez zen lortuko ordea horrelakorik. Dedekinden eskutik etorri zen hainbeste esperotako emaitza.

Dedekinden ahalegina "analisiaren aritmetizatzea" deitu izan den prozesuaren baitan ulertu beharrekoa da. Berkeley filosofo anglo-irlandarrak jadanik, 1734an argitaratutako *The Analyst, or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* idatzian [Berkeley 1734] ironia handiz tratatzen zuen Newtonek emandako kalkuluaren formulazioan aurki zitekeen zehaztasun eta ulergarritasun falta, metafisikarekin alderatuz. Eta egoera argitzeko saiakerak egon ziren arren, mende bat geroago ere ondokoa baieztatzen zuen gogaituta Abelek: "[...] batek gaur egun analisian aurki dezakeen iluntasun ukaezina. Ez du erakusten ez inolako antolamendurik, ez inolako batasunik [...] eta okerrena da, ez dela inolaz ere zehaztasunez tratatua izan. Analisi aurreratuan zehaztasun osoz frogatzen diren teorema gutxi batzuk baino ez daude"[7]. Kontuan hartzekoa da garai hartan matematikariek oraindik ez zutela, gaur analisiaren oinarrizko kontzeptutzat jo daitezkeen limite, jarraitutasun edo deribagarritasunik erabiltzen. XIX. mende amaierarako ordea, Bolzano, Cauchy eta Weierstrasse bezalako matematikariek egindako lanari esker, Abelek eskatutako analisiaren oinarrien inguruko argitasun kontzeptuala neurri handi batean lortua zen. Bide honetatik aurrez lortutako emaitzak eta oharkabean pasatako akatsak hobeto ulertzeko modua jarri zen, alde batetik, eta ordura arte pentsaezinak ziren ikerketarako eremuak ere zabaldu ziren, bestetik[8]. Hauek hasitako lanaren ondorengoa da Dedekinden ekarpena.

Analisia zein algebaren sinpletasuna eta batasuna lortzeko ezinbestekoak ziren zenbaki errealak. Dedekinden garairako ezaguna zen zenbaki arruntak erabiliz zenbaki osoak nola definitu zitezkeen, zenbaki arrunten bikote ordenatuen arteko baliokidetasun klase bezala[9]. Eta ez hori bakarrik, baita zenbaki arrazionalak, zenbaki

[7] [George & Velleman 2002, 13. or.]-n aipatua.

[8] Hona matematikaren barne oinarritzearen paradigma, gure lanean behin eta berriz errepikatuta agertuko zaiguna.

[9] Kasu honetan, n, m, k eta l zenbaki arruntak izanik, $(n, m) \sim (k, l)$ baliokideak izango dira, $n - m = k - l$ erlazioa betez gero. Eta $\mathbb{Z}$ zenbaki osoen multzoa, zenbaki arrunten bikote ordenatuen

osoak erabilita nola defini zitezkeen ere[10]. Azkenengo urratsa zen *erredukzio* horretan falta zena: zenbaki errealak zenbaki arrazionalak erabilita definitzea. Hori egingo balitz, frogatua geratuko litzateke zenbaki arruntak erabilita gainontzeko zenbakiak defini zitezkeela, hau da, zenbaki guztiak arruntetara erreduzitu zitezkeela, eta beraz zenbaki arruntak zirela *oinarrizkoak* aljebran eta analisian. Azkenengo urrats hori nola eman erakutsi zuen Dedekindek 1872an [Dedekind 1872]. Greziarren garaitik irekita zegoen kantitate diskretu eta magnitude jarraituen arteko erlazioa zein zen eta bi kontzeptuok nola bateratu zitezkeen erakutsi zuen Dedekindek.

Bi dira Dedekindek matematikaren oinarrietan argitaratutako lan nagusiak, lehenbizikoa *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [Dedekind 1872], non zenbaki errealak zenbaki arrazionalen multzoko *ebakidura* moduan definituta analisiko emaitza garrantzitsuak errigorez frogatzea lortzen den, horien artean [Dedekind 1872]-ko hitzaurrean aipatutako zenbaki errealen segida bornatuen kobergentziarena edo ordura arte frogatu gabeko $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ bezalako ohiko berdintzak. Bestea *Was sind und was sollen die Zahlen?* [Dedekind 1888], Dedekinden zenbaki arruntaren analisia aurkezten duena, lehenbiziko aldiz garatutako multzoen teoria baten gainean. Lehen kapitulu honetako 1.2.3 eta 1.2.4 ataletan hitz egingo dugu, hurrenez-hurren, bi ekarpen hauei buruz.

Dedekinden azterketarekiko oso bestelakoa da guk hemen aztertu nahi duguna. Fregeren arabera analisia aritmetizatu ostean, zenbaki arruntaren azterketa logiko-filosofiko bat beharrezkoa zen berak defendatzen zuen matematikaren izaera logikoa argitzeko. Bere ekarpena matematikaren baitakoa baino filosofiaren eta, bereziki, logikaren baitakotzat hartu beharrekoa da. Ikusiko dugun bezala zentzu honetan garatutako lehenbiziko proiektua Fregerena izan bazen ere, ez zen hau, matematikari

multzoaren baliokidetasun erlazio horrekiko zatidura klase bezala definitu daiteke: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$.

[10] Kasu honetan, n, m, k eta l zenbaki osoak eta $m \neq 0 \neq l$ izanik , $(n, m) \sim (k, l)$ baliokideak izango dira, $nl = mk$ erlazioa betez gero. Eta $\mathbb{Q}$ zenbaki arrazionalen multzoa, zenbaki osoen bikote ordenatuen multzoaren baliokidetasun erlazio horrekiko zatidura klase bezala definitu daiteke: $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - 0)/\sim$.

oinarritze logiko-filosofiko bat, eta beraz, kanpoko oinarritze bat eskaintzeko ahalegin bakarra.

Matematika logikara erreduzitzen zela, eta beraz, matematika finean logika baino ez zela erakutsi nahi zuen Fregek. Matematikaren oinarrien inguruko Fregeren lana hiru liburutan jasoa dator hein handi batean: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [Frege 1879], *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* [Frege 1884] eta *Grundgesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet* [Frege 1893-1903]. *Begriffschrift*-a 88 orriko lan labur bat da, Fregek asmatutako sinbolismo berria aurkeztu eta azaltzen da bertan. Garrantzia historiko handia duen lana da logikan, bertan aurkezten baita lehenbiziko aldiz modu sistematiko batean proposizioen kalkulua eta predikatuen kalkulua. *Grundlagen*-ean Fregek egindako zenbaki kardinalaren azterketa logikoaren azalpen ez-tekniko bat ematen da, kuestio filosofikoak eztabaidatzen direlarik. Azkenik, matematikaren oinarrietan Fregek eginiko lan nagusia, erraldoia, *Grundgesetze*-etan jasotzen da, 1893an eta 1903an argitaratutako bi liburukietan. Fregek matematikaren oinarrietan zituen ideiak aurkezteko nahikoa izango zaigu hemen *Grundlagen*-etako eztabaidaren nondik norakoak aztertzea, aurreko atalean ikusitako kuestio filosofikoak gogoan izanik, eta *Russellen paradoxak* Fregeren lanari amaiera nola jarri zion erakusteko sartuko gara, berez lan nagusia den, *Grundgesetze*-ak aipatzera[11].

Fregeren logizismoaren tesi nagusiak aritmetika (eta honekin matematika osoa) logika hutsaren gainean jarri zitekeela zioen, ordura arte nagusia izan zen Kanten aritmetikaren teoriari kontrajarrita[12]. Esan beharra dago, sarritan [Dedekind 1888] artikulua ere, Fregerenarengandik modu independentean garatutako proiektu logi-

[11] Fregek [Frege 1893-1903] lanean egindako aritmetikaren garapenaren azalpen zehatza aurki daiteke [Heck 1993] artikuluan. [Frege 1879]-n Fregek aurkeztutako kontzeptugrafia ulertzeko interesgarria da [Kneebone 1963]-ek eskaintzen dion atal laburra.

[12] Ikusi [Gillies 1982] liburuko 1. kapitulua Kanten matematikaren teoria ikusteko.

zista baten baitan kokatu izan dela[13]. Oso zalantzazkoa da hau. Egia da Dedekindek aritmetikaren oinarrien inguruko [Dedekind 1888] bere artikuluan logikari eta motibazio filosofiko lauso batzuei buruzko aipamen batzuk egiten dituela, "pentsamenduaren legeei" erreferentzia eginez, baina Fregeren kasuan ez bezala, Dedekinden kasuan argi dago bere interesak guztiz matematikoak direla, eta inolaz ere ez logikan edo haragoko kuestio filosofikoetan. Eta bi gizonen lanen artean antzekotasunak topatu daitezkeen arren, praktikan Dedekinden lanak kutsu "matematikoagoa" du, Fregek askoz tresneria formalagoa darabilen bitartean[14].

Lehen azaldu dugun moduan garai honetarako analisiaren aritmetizatzea burutua zen, hau da, zenbaki errealak, arrazionalak eta osoak zenbaki arrunten gainean nola definitzen ziren ezaguna zen. Eta esandako bidetik Fregeren *Grundgesetze*-en asmo nagusia, bat zenbakia zer zen argitzea izan zen. Izan ere, Frege ez baitzegon batere ados garaiko zenbaki arrunten izaerari buruzko ikuspegi nagusiekin, hauek esperientzian oinarritzen ziren heinean. Millek edo Kantek sostengatzen zutenaren kontrara, Fregerentzat zentzumenak ez ziren inolako oinarria justifikazio aritmetikorako, enpirismoa ez zen onargarria matematikaren kasuan. Gehienez ere egitate horiek jasotzerakoan paperen bat jokatu zezaketela onartzen zuen Fregek.

Egia aritmetikoak, eta ondorioz egia matematikoak orokorrean, zertan oinarritzen ziren, zeren gainean justifika zitezkeen erantzun nahi zuen Fregek, eta logika izan zen bere erantzuna. 1879an argitaratu zuen lehen mailako logika lehenbizikoz jasotzen zuen *Begriffsschrift* izeneko liburua [Frege 1879]. Bertan kuantifikatzaile/aldagai nozioa erabilita, orduan ohikoa zen sujetu-predikatu erako analisi gramatikalagoa alde batera utzi, eta proposizio predikatiboen arteko inferentzia-erlazioen egitura agerian utziko zuen azterketa funtzionalago bat nola egin erakutsi zuen. Arrazoiaren kanonen sistematizazio zehatza lortzen zen horrela Fregeren ustetan. Giza pentsamenduari lo-

[13]Ikusi esaterako [Ferreiros 2008] edo [Reck 2011].
[14]Ondo azalduta datoz gai hauek [Gillies 1982] liburuan.

tutako kuestio psikologikoekin zerikusirik ez zuena, bide batez. Hau da, logikak ez du ezer esatekorik gizakien arrazonatzeko moduaz[15].

Hau guztia erabat modu sistematikoan garatu beharrekoa zela pentsatzen zuen Fregek. Eta bide horretan sistema axiomatikoei greziarren garaitik izandako bultzada nabariena eman zien *sistema formalen* sorrerarekin. Kontu handiz bereiztu zituen bere sistema logiko horretako oinarrizko printzipioak eta inferentzia erregelak. Teorema baten frogapenean emandako pausuek hutsunerik gabeko kate bat osatzen zutela ziurtatzeko ezinbestekoa zen ordura arte ezagutu gabeko formaltasun maila hau. Eta honek proposizioaren egiazkotasunaren gaineko edozein zalantza uxatzeko balio zuen. Tresna hau, Fregek argi zuen moduan, inferentziak ulertzeko eta baieztapenen arteko egitura justifikatibo sistematikoa erakutsiz, edozein jakintza esparru argitu eta ordenatzeko gure ahalmenari eginiko ekarpen moduan ulertu behar da; eta ez matematikarien eguneroko lan-tresna moduan.

Logika erabiliz aritmetikaren jakintza esparrua aztertu eta berrantolatu zuela esan zuen Fregek, Peanoren aritmetikaren printzipioak bigarren mailako logika sistema batean deribatzea lortu ostean, eta aritmetikako oinarrizko printzipioen multzoa hutsa zela ikusi ostean, hau da, ez zegoela printzipio logikoetatik haragoko beste inolako suposizioren beharrik, hauetatik modu logiko batean aritmetika osoa deduzitzeko. Begiratu batean hala ez iruditu arren, aritmetika inferentziaren zientziaren garapen hutsetik eratortzen zela, eta bere egiak, hortaz, horko legeetatik eratortzen zirela ondorioztatu zuen Fregek.

Logika izan zen hainbestean, matematikaren oinarritzean esperientziak izan zezakeen edozein eraginen aurka Fregek aurkeztu zuen alternatiba. Bere idatzietan esperientzia, bai bere edukietan zein formetan, aritmetikaren oinarrietan inplikatua

[15] Matematikaren oinarrien inguruko hiru liburuez gain kuestio filosofikoen inguruko artikulu asko idatzi zuen Fregek. Horietan ere argi ikusten dira Fregeren motibazio filosofikoak zeintzuk ziren. Ingelesera itzulitako bilduma bat [Geach & Black 1980] da.

ez zegoela erakusteko argudio andana erabilita ere, arrazoirik pisuzkoena dudarik gabe, bere programa logizistaren ustezko egingarritasuna izango zen. Programa logizista burutzeak, azken batean, aritmetika logikaren oinarizko printzipioen gainean eraiki zitekeela erakutsiko zuen, eta horretarako ez zela munduari buruzko egia enpirikoen beharrik, ez eta intuizio lausoen bidez baino jaso ezin ziren egien beharrik. Azalpen sinpleagoak bazirela eta intuizioetara jo beharrik ez zegoela.

“Zein egiaren gainean sostengatzen dira aritmetikako egien justifikazioak?” matematikaren oinarritzeari buruzko galderari Fregek emandako erantzunean, logikak bi paper jokatzen zituen. Batetik galderari emandako erantzunean jokatzen zuena eta azaldu berri duguna. Eta bestetik galdera beraren esanahia ulertzeko orduan jokatzen zuena, hau da, logika oinarrian jarri ondoren logika beraren legeak jarraituz aritmetika osoa deduzitzea. Horregatik diogu *Begriffsschrift* [Frege 1879] lanean emandako dedukzio formalerako tresneriarik ezean, galdera ezin erantzun izateaz gain, formulatu ere ezingo zukeen egin.

Honakoa, arestian erantzun ezinda utzi ditugun galdera filosofikoei erantzuna eman nahian garatu ziren programetako bat dela esanaz abiatu gara. Fregeren programak galdera hauek erantzutean izan dezakeen arrakastak ere, zerikusi zuzena du batek duen logika ikusteko moduarekin. Fregek aipatutako moduan aritmetika logikara eraman ahal izateak, matematikaren gainean luzatutako galderak, logika beraren gaineko galdera bilakatuko lituzke automatikoki. Eta logika, beste jakintza esparru bat baino ez balitz, argi legoke, Fregeren programa logizistak galderen fokua lekuz aldatu bai, baina galdera berriak erantzun gabe utziko lituzkeela. Lehengoetan, beraz. Baina ez zen hau Fregeren ikuspuntua. Izan ere, Fregerentzat logika beste zientziak baino orokorragoa baitzen. Logika ez zen, beste esparruek egiten zuten bezala objektu edo fenomeno konkretuak aztertzeaz, eta hauen inguruko egiak bilatzeaz arduratzen. Egiaz arduratzen zen logika. Egia orokorrean hartuta. Proposizioz proposizio egia zein baldintzatan transmititzen den aztertzen zuen logikak. Logikako legeek pentsamendu arrazional ororen gainean agintzen zuten. Proposizio batetik beste bat nola inferitzen zen eta baieztapen bat beste bat erabiliz nola justifikatzen zen erakusten zuten logikaren legeek. Arrazoitzeak, azken finean, argumentatzeko forma batzuk erabiltzea esan nahi zuen, horretarako sistema logiko bat aurrez onartuta. Hori zela eta ez zeukan zentzu handirik logikaren justifikazio bat eskatzeak eta programa logizistak matematikaren justifikazioaren gaineko galderak isilaraziko lituzke. Hori zen Fregeren ikuspuntua.

Ezagutza matematikoaren *a priorizko* izaeraren gaineko galderak ere berrartu ditzakegu. “Nola jaso dezakegu ezagutza matematikoa, esperientziatik at, hausnarketa hutsean oinarrituta?” galdetzen genuen. Logizismoa zuzen badabil, ordea, egia aritmetikoak egia logikoak baino ez lirateke; pentsamendu arrazionalaren loturen inguruko egiak. Pentsamendu arrazionalaren inguruko egiak pentsamendu hutsean oinarrituta jasotzeak ez dirudi hain gogorra denik. Fregek dioen moduan “zuzenean gure arrazoiari ematen zaizkion objektuei buruz” dihardu aritmetikak.

Zer esanik ez matematikaren aplikagarritasunari lekarkiokeen azalpena. Matematika logika bada, eta logika disziplinarik orokorrena bada eta eduki konkretuetatik harago, pentsamendu arrazional orori aplikatzen zaiona bada, ez dirudi kuestio honek ere aparteko harridurarik sortuko lukeenik.

Baina filosofikoki ez ezik, jardun matematikoari ere ekarpenak egiten zizkiola arrazoitzen zuen Fregek. Esan dugun bezala, egia matematikoen arteko dependentzia logikoen erlazioak azalarazteak panorama argitzeko balio zuelako. Teorema baterako beharrezkoak uste ziren hipotesi multzo bat baztertuz, adibidez, teoremaren egia justifikatzerakoan inongo zeresanik ez zutela argi geratzen zelako. Edo alderantziz, teoremaren justifikaziorako beharrezko hipotesien multzoa hasieran kontsideratzen ez ziren proposizioez osatu beharra zegoela ikusi zelako. Era honetako egoerak ekarriko lituzke Fregeren ekarpenak. Baina ez hori bakarrik, proposizio baten justifikazioan parte hartzen zuten kontzeptuak ere hobeto ulertzea ekarriko luke. Eta ulergarritasunari buruz hitz egitean, beti bezala, Frege ez zen aspektu psikologikoetaz ari, kontzeptuen formarik oinarrizkoenak eta hauen antolamenduari buruz baizik. Kasu askotan mende askotako esfortzu jarraitu bat behar izaten dute prozesu hauek eta Fregeren ustez bere programak bide honetan ere lagun zezakeen.

Zenbaketaren inguruko arazoekin hasi zen Frege [Frege 1884]. Zenbakiaren definiziorik izan gabe, bi bilduma tamaina berekoak edo *kopurukideak* direla ikusteko, nahikoa baitzen hauen arteko korrespondentzia biuniboko bat ezartzeko gauza izatea. Fregeren terminologia erabilita, bi *kontzeptu* kopurukideak direla esango da, hauen *hedadurak*, edo hauei dagozkien bildumak, kopurukideak direnean:

> F eta G edozein bi kontzepturentzat, F-ren kopurua eta G-ren kopurua berdinak dira baldin eta F eta G kopurukideak badira.

Bi kontzepturen kopurukidetasuna, zenbaki arruntari erreferentziarik egin gabe definitzea lortu zuen horrela Fregek. “Hume-ren printzipioa” deitu izan zaio honi.

F kontzeptu bezala “bere buruaren desberdina izatea” propietatea hartuz gero, inongo objektuk bete ezin dezakeena izanik, F kontzeptuaren hedaduran ez legoke objekturik. Honela, “F kontzeptuaren kopurua” bezala definitu zuen Fregek zero zenbakia.

“Zenbaki arrunten segidan hurrengoa” izatearen erlazioa definitzeko hurrengo formula erabili zuen Fregek:

> n zenbakia, zenbaki arrunten segidan m zenbakiaren hurrengoa izango da, baldin eta, F kontzeptu bat, eta honetan erortzen den x objektu bat existitzen badira, F kontzeptuaren kopurua n izanik, eta “x-en desberdina izanik F-n erortzea” kontzeptuaren kopurua m izanik.

Bestela esanda, n zenbakia m zenbakiaren hurrengoa izango da, existitzen bada zehazki n objekturi aplikatzen zaien kontzeptu bat, eta honi objektu bat kentzean, zehazki m objektu geratzen badira. Hau guztia, "objektu", "kontzeptu" eta "identitatea" bezalako, terminologia "logiko" fregearra erabiliz esateko diseinatuta dago.

Aurrez ikusi dugu zero zenbakia nola definitu duen Fregek. Behin zeroa izanda, hau bat zenbakia definitzeko baliatuko du. Horrela bada, G kontzeptu bezala "zeroren berdina izatea" hartuta, hau beteko duen objektu bakarra aurrez definitutako zero zenbakia denez, G kontzeptuaren kopuru bezala definituko du Fregek bat zenbakia. Hori egin ostean Fregek, berak emandako "zenbaki arrunten segidan hurrengo izatearen" definizioaren arabera, bat zenbakia zenbaki arrunten segidan zero zenbakiaren hurrengoa dela frogatuko du.

Bi zenbakia antzeratsu, "zero zenbakia edo bat zenbakiaren berdina izatea" kontzeptuaren kopuru bezala definituko du segidan Fregek, eta horrela gainontzeko zenbaki arruntentzat ere. Orokorrean, n zenbaki arrunten segidako edozein zenbaki izanik, S_n kontzeptu bezala "n-rainoko zenbaki arrunten segidakoa izatea" hartuta, Frgek S_n kontzeptuaren kopurua, n zenbakiaren hurrengoa dela erakutsi zuen, hau da, $n+1$. Eta beraz, zenbaki arrunten segida infinitua zela.

Bukatzeko, Fregek, *zenbaki arruntaren* definizioa eman nahi izan zuen. Zero zenbakitik abiatuta, segidan hurrengoa izatearen aplikazioa kopuru finitu batez aldiz aplikatuta lor zitekeen edozein objektu bezala definitzeak zirkularitate bat zekarren, "kopuru finitu bat aldiz" nozioaren baitan. Berriz ere bide "logiko hutsetan" oinarrituta, arazoa saihestea lortu zuen Fregek:

> n zenbaki arrunt bat izango da, baldin eta F edozein kontzepturentzat, zero bertan erortzen bada, eta edozein d objekturentzat, d F-n erortzen dela suposatzetik d-ren hurrengoa F-n erortzen dela ondorioztatzen bada, orduan n F-n erortzen bada.

Bestela esanda, n zenbaki arrunta izango da, zero barruan duen eta "hurrengo" eragiketarekiko itxia den edozein kontzepturen baitan erortzen bada[16].

Definizio hauetatik ohiko proposizio aritmetikoak nola frogatzen ziren erakutsi zuen Fregek ondoren, tartean esaterako, indukzioaren printzipioa baita ere[17]. Humeren printzipioan oinarrituta aritmetikako printzipioak deribatzeari *Fregeren teorema* esaten zaio gaur egun.

Bazen ordea arazo bat Fregeren ikuspegian, Humeren printzipioan oinarrituta aritmetikako printzipioak deribatzerakoan, zenbaki arrunten arteko erlazioak erakutsi eta bilduma desberdinen tamainarentzako definizioak eskaini bazituen ere, ez zuen zenbaki arrunten, beren baitako definiziorik ematen. Ez zituen zenbaki arruntak *identifikatzen.* Zer *zen* 2 zenbakia azken batean? Lan hori burutzeko, Fregeren aburuz, ezinbestekoa zen edozein zenbaki arrunt beste edozein objekturen identikoa edo desberdina, nola eta zergatik zen esateko gauza izatea. Adibide ezagun bat erabilita, 2 zenbakia eta Julio Cesar desberdintzeko balio beharko luke eskatutako definizioak. Zenbaki arruntak identifikatzeko Fregeren problemari "Cesarren problema" deitu izan zaio arrazoi honengatik.

Gorago ere aipatu ditugun kontzeptuei erlazionatutako *hedaduraren* kontzeptua erabili zuen Fregek, arazo hau gainditzeko. Kontzeptu baten *hedadura* kontzeptu horretan erortzen diren, edo propietate hori betetzen duten objektuen bilduma izanik. Fregek ondoko definizioa eman zuen:

> F-ren kopurua, "F kontzeptuarekiko kopurukidea" kontzeptuaren hedadura da.

[16]Gaur *induktibo* deituko litzaioke era horretako kontzeptu bati.

[17]Egia esatekotan, Fregek ez zuen, gaur, zenbaki arrunten Peanoren axiomatika deitzen dugun proposizio multzoa identifikatu. Programa logizistaren hutsune bat dela kontsidera daiteke. Hutsune hori nola betetzen den ikusteko [George & Velleman 2002, 37-41 or.].

Era honetan, bi zenbakia, esaterako, “Andoniren guraso izatea” kontzeptuaren kopuru bezala har daitekeena, ez litzateke izango, “kontzeptu honekiko kopurukidea” kontzeptuaren hedadura, baino. Hau da, zehazki bi objektuk betetzen duten kontzeptu guztiak jasotzen dituen bilduma. Esaterako “pertsona arrunt baten eskuak izatea” kontzeptua 2 zenbakiaren barnean legoke. Fregek Humeren printzipioa definizio honetatik nola eratortzen zen erakutsi zuen, zenbaki arruntentzako programa logizista burura eramanez, aurreko definizioak egokiak izatekotan. Aritmetika kontzeptu hauen hedaduren eta zenbaketaren inguruko oinarrizko egitate batzuetatik deribagarria zela erakutsi zuen.

Aurreko atalean esan dugu Fregerentzat logika ez zela beste zientziekin parekagarria, ez zelako, besteak ez bezala, bereziki ezeri buruzkoa, eta horregatik aplika zitekeela modu unibertsalean: egia logikoak erabat orokorrak ziren. Kontzeptuen eta hauen hedaduren erabilerak ez ziruditen printzipio honen aurkakoak. Pentsatu ahal izateko ezinbestekoak ziren kontzeptuak. Edozein objekturentzat, objektu hauei zegozkien kontzeptuak eta, era berean, azken hauei zegozkien hedadurak zeuden. Hauek osatzen zuten logikaren ontologia. Eta hauetatik aritmetika nola eraiki erakutsi zuen Fregek.

Fregek kontzeptuen eta hauen hedaduren teoria oso bat garatu zuen beranduago *Grundgesetze der Arithmetik* [Frege 1893-1903] lan nagusian. Hau, ordea, lanaren alderdi nagusia den aritmetika lantzeko prestaketa lana baino ez da izango. Eztabaida aritmetiko osoa zenbaki kardinalaren definizioan oinarrituko da, aurrez *Grundlagen*-etan landutakoa, eta guk goian deskribatu duguna. Kasu honetan ordea F kontzeptuari dagokion zenbaki kardinala honekin kopurukideak diren kontzeptuen hedadura bezala definitu beharrean, F kontzeptuaren hedadurarekin kopurukideak diren hedadurak bezala definituko ditu. Definizio hau erabiliko du *Humeren printzipioa* deribatzeko eta gero honetatik Dedekind-Peanoren axiomak deribatuko ditu. Eta bigarren mailako logika eta axioma ez logiko bakar bezala *Humeren printzi-*

pioa erabilita sistema konsistente baten barnean hori egitea posible dela ikusi den arren[18], Fregek erabilitako sistema formala inkonsistentea zela ikusi zen. Fregeren V. Oinarrizko Legetik kontraesan bat deribatzea lortu zuen Russellek. Honela zioen *Grundgesetze*-etan enuntziatutako Oinarrizko V. Legeak:

> F eta G edozein kontzepturentzat, F-ren hedadura G-ren hedaduraren berdina da baldin eta edozein a objekturentzat, Fa baldin eta soilik baldin Ga bada.

Beste hitz batzuekin esanda, F eta G kontzeptuen hedadura berdina dela, baldin eta bietan ere objektu berberak erortzen badira. Bertrand Russell-ek gaur "Russell-en paradoxa" bezala ezagutzen dugun inkonsistentzia bilatu zion Fregek enuntziatutako oinarrizko lege honi.

Russellek, hedadura bat izatekotan kontraesanera zeraman kontzeptu baten adibidea aurkitu zuen: *bere buruaren elementu ez den multzoa.*

$$R = \{x \mid x \text{ multzo bat da eta } x \notin x\}$$

deitzen badugu kontzeptu horren hedadura, ondoko kontraesanera iristen gara:

$$R \in R \text{ baldin eta soilik baldin } R \notin R$$

Russell-en paradoxa deitu izan zaio, Fregeren programa logizistak arrakasta izatea eragotzi zuen argudio honi; benetan, paradoxa bat ez, baizik eta kontraesan bat bada ere, Russell-ek argi izendatu zuen bezala. Fregeren sistemak kontraesanak zeuzkan eta, Frege bera, urte luzeetako lana konpondu ezinik geratu zen, azken orduan ahalegindu bazen ere.

---

[18] Ikusi [Wright 1983]

Fregerenarekin batera Russellena da matematika azken finean logika baino ez zela defendatu zuen bigarren proiektu garrantzitsua. [Russell 1903] lanean aipatzen duenez Russellentzat matematika puroa "baldin p orduan q" erako, p eta q, aldagai berberak dituzten eta konstante logikoetatik aparte beste konstanterik ez duten proposizioez osatutako proposizioen bilduma baino ez da izango. Matematikaren definizio hau justifikatzen saiatu zen Russell gero lan horretan bateko eta besteko proposizio matematikoak aztertuz. Hala ere 1903ko azterketa hori gero etorriko zen *Principia Mathematica* [Whitehead & Russell 1910-1913] Russellen logizismoaren 3 bolumeneko lan nagusiaren aurrekaria baino ez zen izango. Aipatutako azterketak 1903koan baino azterketa sistematiko eta zorrotzago bat eskatzen zuela jabetzen zen Russell eta hori egiteko Peanoren lanetan oinarritutako hizkuntza sinboliko landu bat aukeratu zuen. Peanoren bide axiomatikoa jarraituz, Russellek matematika osoa sistema formal axiomatiko baten baitan jasotzea nahi izan zuen. Bien arteko alde nagusia hala ere honakoa zen: Russell Peano baino harago zihoan "eraikuntza matematiko" honen oinarriak jartzerakoan. Italiarra matematikaren oinarri zen aritmetika definitu gabeko jatorrizko kontzeptu eta frogatu gabeko printzipioetan oinarritzeko prest zegoen bitartean, Russellentzat beharrezkoak ziren jatorrizko kontzeptu bakarrak logikan jasota zeuden eta teorema matematiko guztiak hauetatik berak proposatutako sistema logikoan deduzitu zitezkeela erakutsi nahi izan zuen.

Whithehead eta Russellen *Principia Mathematica* 1910 eta 1913 bitartean argitaratu zen. Ordurako Russellek Fregeren *Grundgesetze*-etako V. oinarrizko legetik bere izena daraman paradoxa aurkitua zuen. Fregek ez bezala ordea Russellek arazoa behar bezala ulertuta eta konponduta programa logizistak bere bidea jarrai zezakeela ondorioztatu zuen. Arazoaren diagnostiko hori zegoen Whiteheadekin idatzi zuen *Principia Mathematica* lan nagusiaren abiapuntuan. Russellentzat Fregeren V. oinarrizko legea zilegia izan daiteke "hedadura" edo "klasearen" definizio moduan, eta honetatik paradoxa deribatzen bazen ere, arazoa ez zegoen lege horretan deribazioan baizik, zirkularitate batean erortzen baitzen. Objektu matematiko baten definizioa *inpredikatiboa* deitzen da, definitutako entitatea barnean hartzen duen bilduma bati erreferentzia egiten badio. Matematikan asko dira era honetako definizioak, esaterako, bi zenbaki osoren arteko zatitzaile komunetako handiena, bi zenbakion zatitzaile komunen multzoan "handiena" bezala definitzen da. Era honetako definizioetan datza Russellen ustez berea eta antzerako paradoxen[19] jatorria. Honen arabera R kontzeptu bezala x objektu bati ondoko kasuan aplikatzen zaiona hartzen bada: "existitzen da F kontzeptu bat, honentzat x hedadura izanik eta Fx faltsua izanik". r deitzen badugu R kontzeptuaren hedadura, Rr egia edo faltsua izango da. Egia dela suposatzen badugu, V. Oinarrizko Legea jarraituz Rr faltsua izango da (r R-ren hedadura ere badelako). Beraz Rr egia bada, Rr faltsua da. Rr egia dela suposatu dugunez, Rr faltsua da. Beraz existitzen da F kontzeptu bat (R, hain zuzen ere), r F-ren hedadura izanik eta Fr faltsua. Beraz, definizioz, r R-n erortzen da, eta Rr zuzena da. Eta hau kontraesana da. R-ren definizioak F kontzeprtu guztien bildumari erreferentzia egiten dio, R bera horietako bat izanik. R-ren definizioa inpredukatiboa da beraz. Era honetako definizio inpredikatiboak debekatzea izango da Russellek proposatuko duen soluzioa. *Gurpil zoroaren printzipioa* deituko dio Russellek definizio inpredikatiboak galarazten dituen axiomari. Era honetan klase bat bere buruaren elementua ote den ala ez suposatzea ez da faltsua izango Russellentzat, zentzugabea eta bere sisteman debekatua baizik. Unibertsoko klase guztiak barnean dituen klaserik ere ez da existituko arrazoi beragatik: ez du zentzurik. Unibertsoa geruzatan banatzen duen *tipoen teoria* bat proposatu zuen Russellek paradoxak saihestuz programa logizista burutzeko marko egoki bezala. Eztabaida sinplifikatzeko Russellen "funtzio proposizionalak" predikatuen logikan euren hedaduren bidez ordezkatuko ditugu, gaur egungo multzo teoriazko ikuspegi batetik eztabaida jarraitzeko.

Tipoen teorian batetik "indibidualak" zeuden, klaseak ez ziren objektu matematikoak, 0 tipokoak zirenak. Indibidualen klaseak letozke hierarkiaren bigarren posi-

[19]Russellek bere diagnostikoa paradoxa desberdinen azterketatik eman zuen [Russell 1908] artikuluan.

zioan, 1 tipokoak. 2 tipokoak indibidualen klaseen klaseak lirateke etabar. Modu honetan deskriba daiteke Russellek emandako tipoen teoriaren lehen bertsioa, *tipoen teoria sinplea* deitu izan dena [Russell 1903].

Funtzioei buruz beharrean klaseei buruz hitz egitera pasatzeak Fregek emandako zenbaki arrunten definizioa sinplifikatzeko aukera eman zion Russelli. Honela M edozein klaseren elementu kopurua, M klasearen klase kopurukideen klase bezala definitu zuen Russellek. Tipoen teoria sinplearen baitan edozein klaseren elementu kopurua, klase horri zegokion tipo desberdineko klasea zen, bat goragokoa hain zuzen ere. Eta Russellentzat zenbaki arrunt bat klaseren baten elementu kopurua izango da beti. Horrela zero zenbakia elementurik gabeko 1 tipoko klase guztien klasea izango da, hau da, elementu bakarra (1 tipoko multzo hutsa) daukan 2 tipoko klasea izango da. Bat zenbakia elementu bakarreko 1 tipoko klaseen klasea izango da, 2 tipokoa beraz. Bi zenbakia bi elementuko 1 tipoko klase guztien klasea eta abar. Edozein n zenbaki arrunt beraz n-elementuko 1 tipoko klase guztien 2 tipoko klasea izango da Russellentzat.

Fregek emandako zenbaki arrunt baten hurrengoaren kontzeptua ere moldatu zuen Russellek M klase baten kopuruaren *hurrengo* bezala, klase horri bertan ez legokeen edozein elementu biltzerakoan sortzen den klase berriaren elementu kopurua hartuz[20]. Kontzeptu honi lotuta Russellek aritmetikarako ezinbesteko zituen zenbaki arruntak eta hauetako bakoitzaren hurrengoaren kontzeptua eta hori bermatzeko ez zuen *infinituaren axioma* deitu ziona postulatu beste aukerarik ikusi, hau da, bere unibertso geruzatuaren oinarrian 0 tipoko infinitu indibidual existitzen direla froga beharrik gabe baiezten duen proposizioa. Axioma honetatik modu zuzenean eratortzen dira zenbaki arrunten segida eta bakoitzarentzat hurrengo baten existentzia

[20]Zenbaki arruntentzat aritmetika definitzerakoan Russellek Cantorren bidea hartzen du kontuan halaxe aitortzen du *Principia Mathematicaren* hitzaurrean: “Aritmetikan eta serieen teorian gure lan guztia Georg Cantorren lanaren gainean oinarrituta dago” (In Arithmetic and the theory of series our whole work is based on that of Georg Cantor).

Russellen definizioetatik. Russellen axioma honek arazoak sortzen ditu, inola ere ez delako beste axiomen parekoa izaera logikoari dagokionean, baina aritmetikarako ezinbestekoa zaionez postulatu bat bezala onartuko du. Hau izango da denborarekin bere programaren burutuezintasuna argudiatzeko baliatuko den arrazoi nagusietako bat.

Russellen hurrengo urratsa *zenbaki arruntaren* kontzeptu orokorra definitzen ahalegintzea izango da. Tipoen teoria sinpleak zentzu honetan arazo saihestezinak aurkeztuko ditu, Russellek baliatu nahi duen Fregeren zenbaki arruntaren definizio orokorra inpredikatiboa delako: n zenbaki arrunt bat da, zero zenbakia eta barnean duen edozein zenbakiren hurrengoa ere barnean duen edozein klaseren (3 tipokoa) elementua bada. Zenbaki arrunten klasea bere definizioan 3 tipoko klase guztien bildumari erreferentzia egiten dion 3 tipoko klase bat izango litzateke. Russellen paradoxarekin batera ordurako ezagunak ziren beste paradoxa batzuen azterketa sistematikoa burututa, hauen jatorrian leudeken zirkularitate klase guztiak (sintaktikoak eta semantikoak bereiztu izan ohi dira) saihesteko balioko zuen tipoen teoria sofistikatuago bat eman zuen Russellek 1908ko artikulu batean [Russell 1908]; hau izango zen azkenik *Principia Mathematican* aurkeztuko zena. *Adarkatutako tipoen teoria* deitu izan zaio teoria sofistikatuago honi.

Guri hemen interesatzen zaigunerako, nahikoa izango da aritmetika eta honen gainean matematika eraikitzeko bidean aurkitzen zituzten definizio inpredikatiboak saihestu nahian garatutako *adarkatutako tipoen teoria* berriak matematika klasikoko hainbat definizio garrantzitsu problematiko bihurtzen zuela. Zailtasun honi aurre egiteko *erreduzibilitate axioma* izeneko axioma berezi bat erantsi zion Russellek beren sistemari[21]. Honen arabera tipo bakoitzean edozein funtzio proposizionalentzat bada formalki baliokidea den lehen ordeneko funtzio predikatibo bat, eta beraz funtzio in-

[21] 1908ko artikuluan jadanik horrela agertzen da eta Whiteheadek aitortzen du adarkatutako tipoen teoria Russellena dela guztiz.

predikatiboak predikatiboen bidez ordezkatzeko bidea ematen du. Russellek tipoen teoria sinplea klaseen bidez ikuspegi estensional batetik emanda Fregeren zenbakiaren azterketa modu sinpleago batean emateko aukera izan zuela esan dugu gorago. Adarkatutako tipoen teorian Russellek jadanik ezin du tipoen teoria sinplean hartutako ikuspegi estensionalik erabili eta horregatik jotzen du erreduzibilitate axioma formalizatzerakoan ikuspegi intentsionala erabiltzera. Infinituaren axiomaren kasuan bezala erreduzibilitate axioma ere ezin zitekeen inola ere axioma logiko bat bezala kontsideratu, hori baino gehiago, sortzen ziren arazoak konpontzeko *ad hoc* eginiko zuzenketa baten itxura gehiago zuelarik. Russellen proiektu logizista burutzeko ezinbestekoak ziren bi axioma hauen izaera ez-logikoa erabakiorra suertatuko zen etorkizunean, matematika logikan oinarritzeko ahalegin berri hau ere onargarritzat ez jotzeko. Fregeren lana bezalaxe helburua lortu ez izanaren estigma geratuko zitzaion Russellen saiakerari, honek bere lorpen partzialen zenbatekoa izkutatu behar ez lukeen arren.

Beranduago Russellen adarkatutako tipoen teoriaren jatorrian zegoen zirkularitate tipo desberdinen azterketan paradoxa sintaktikoak (Russellen paradoxa bezalakoak) eta paradoxa semantikoak (gezurtiaren paradoxa bezalakoak[22]) bereiztu beharrekoak direla ikusi izan da. Matematikaren garapenean zerikusirik izan dezaketen bakarrak paradoxa sintaktikoak direla eta hauek direla matematika oinarritu nahi deneko sistema batek saihestu beharrekoak. Horretarako Russellek 1903an proposatutako tipoen teoria sinplea nahikoa dela ikusi izan da eta ez dagoela teoria adarkatuaren sofistikazio eta problemetan galdu beharrik. Tipoen teoria sinplea izan zen, esaterako, Churchek formalizatu zuena funtzioaren eta errekurtsioaren azterketarako bere λ-kalkulua ematerakoan.

[22] Aintzinako greziatik ezaguna den paradoxa hau: “esaldi hau faltsua da”. Esaldia egiazko edo faltsua izateak kontraesanera garamatza.

1.1.3 Brouwerren intuizionismoa

Intuizionistentzat Fregeren logizismoak nolabait erantzun nahi zituen kuestio filosofikoak, erredukzio logizistek besterik gabe asumitzen zuten errealitate matematikoaren izaerari buruzko posizionamendu tazito bat baztertuz erantzun zitezkeen: *errealismoa matematikan* baztertuz hain zuzen ere.

Mundu naturala gugandik independentea eta determinatua dela dio *errealismoak*, hau da, gauzak munduan modu jakin batekoak direla guk horiek ezagutzera iristeko dugun ahalmenarekin inongo loturarik gabekoak. Esaterako, “momentu honetan munduko emakume kopurua gizonezko kopurua baino handiagoa da” proposizioa munduak berak egiten du egiazko edo gezurrezko, guk hori ezagutzeko aukera gutxi dugun arren. Inor gutxik jarriko du zalantzan, ordea, bi aukera daudenik: proposizioa egiazkoa izatea edo bere ukazioa egiazkoa izatea. Eta orokorrean mundu naturalari buruzko proposizioetan *Tertio Excluso* legea onartzera garamatza ikuspuntu errealistak:

> Mundu naturalari buruzko edozein S proposiziorentzat,
> S egiazkoa da edo ez-S egiazkoa da.

Matematikaren ikuspuntu errealista bat duenak errealitate matematikoa determinatua eta gugandik independentea dela aitortuko du. Adibidez, 2 baino handiagoa den edozein zenbaki bikoiti bi zenbaki lehenen batura dela dioen *Goldbachen konjektura* ezaguna hartuko bagenu, eta nahiz eta milaka milioi zenbakirekin aproba egin ostean kontraadibiderik aurkitu ez den, ohiko matematikari errealista batek, konjekturak dioena edo bere ukazioa egia direnik inongo zalantzarik ez luke izango, proposizio matematikoei lehen aipatu dugun *Tertio Excluso* legea aplikatuz. Hau da matematikari gehienek praktikan daukaten ikuspegia, eta baita Fregek berak zuena ere. Baina zenbait zalantza plantea dakizkioke errealitate matematikoa ulertzeko modu honi.

Errealitate matematikoari buruzko ondorio zuzenak dakartza ikuspegi anti-errealista honek: errelalitate matematikoa ez legoke determinatua, eta errealiate horri buruz plazaratu daitekeen edozein galdera zentzudunek ez du zertan erantzunik izan. Erantzun oro egiazkoa edo faltsua egiten duen errealitate finkaturik ez delako existitzen. Errealitate matematikoaren ikuspuntu hau defendatzen duten ildo batzuek osatzen dute *konstruktibismoa* deitu izan den adarra matematikaren filosofian.

XIX. mendearen azken laurdenean hasi zen agertzen konstruktibismoa ikusmolde berezi bezala matematikaren barruan, Dedekind eta Cantorrenak bezalako kontzeptu eta frogapen metodo gero eta abstraktuagoetarako joerak hartutako abiada handiari kontrapisu egiteko asmotan[23]. Kronecker, Dedekinden irakasle izana, izan zen seguerenez lehenbiziko konstruktibista kontzientea baina, Brouwer matematikari holandarraren idatzi polemikoak izan ziren matematika modu batean konstruktibista bezala gaur ulertzeko oinarriak modu zehatz eta sistematikoan ezartzen lagundu zutenak [Brouwer 1925-1927].

Konstruktibismoaren barruan, *intuizionismo* bezala ezagutzen da Brouwerren matematikaren filosofia, eta honen arabera, errealitate matematikoa ez da zehaztua eta gugandik independentea, giza-gogoaren sorkuntza librea baizik, eta objektu matematikoen existentziak, beren (gogozko) eraikigarritasunean datza. Eraiki badaitezke existitzen dira eta bestela ez.

Saiakera eta adar desberdinak aurki daitezke matematika konstruktibistaren barruan, guztiak azken mende eta laurdenean eginak, bakoitza bere berezitasunekin: Brouwerren matematika intuizionista, Markoven matematika konstruktibista errekurtsiboa, Bishopen matematika konstruktibista, Martin-Löfen Tipoen Teoria konstruktibista edo Friedmanen Alderantzizko Matematika Konstruktiboa, besteak beste. Intuizionismoaren nondik norakoak berrikusiko ditugu hemen, adibide gisa balio de-

[23] Ikusi [Troelstra 1994].

zaten, nahiz eta Brouweren bideak eta gureak ez egin bat.

Matematikari errealista edo klasikoarentzat, proposizio baten baieztapena zuzena edo okerra egiten duena gugandik independentea eta determinatua den errealitate matematikoa, bera, izango da. Proposizio matematikoen baieztagarritasun zuzenerako baldintza klasikoak *egia-baldintzak* direla esanaz ezarri ohi da hau. Lehen mailako logika klasikoko egiaren definizio errekurtsiboa, operatzaile logikoek, agertzen diren proposizioetan, hauen baieztagarritasun zuzenerako baldintzetan duten eraginaren zehaztapen bezala ikus daiteke. Adibidez, definizio honen arabera $\forall x Fx$ proposizioa egiazkoa izango da $\mathfrak{I}$ interpretazio batean, baldin eta $\mathfrak{I}$-ren domeinuko edozein objektu, $\mathfrak{I}$-k Fri egokitutako hedaduran erortzen bada. Eta orokorrean, horrela definitutako baieztagarritasun baldintzei[24] erreferentzia eginez erabakitzen du matematikari klasikoak inferentzia forma baten baliozkotasuna.

Egia-baldintza klasikoak ezin dira, ordea, matematikari intuizionistak proposizio baten baieztagarritasun zuzenerako baldintzak izan, bilduma infinitu osatuak inplikatzen dituzten baldintzak ulergaitzak direlako beraientzat. Bilatutako baldintzek finitarioak izan beharko dute; gizaki batek banan bana konprobatzeko modukoak, modu idealizatuan bada ere (finituak baina handiak diren kasuan). Froga matematikoak finituak izan behar direla kontutan hartuta, eskatutakoa burutzeko modu naturala frogak, berak, eskaintzen du. Baieztagarritasun baldintzatzat frogagarritasuna hartzea: frogatu badaiteke, baieztatu daiteke. Proposizioen baieztagarritasun baldintza intuizionistak *froga-baldintzak*[25] deituko dira, beraz. Eta existentzia frogatzeak eraikuntza lortzea esan nahi du.

Proposizio matematikoen baieztagarritasunerako egia-baldintzak edo froga-baldintzak erabiltzeak desberdintasun nabarmenak sortzen ditu egokiak diren inferen-

[24] Ikusi adibidez [Mendelson 1964] 4. edizioko (1997), 2.2. atala.
[25] Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretazioa ere deitu izan zaie [Troelstra 1994].

tzia-formak aukeratzeko orduan. Batzuk aipatuko ditugu hemen.

Tertio Excluso legea da matematikari klasikoaren inferentzia forma nagusietako bat eta honela idatz dezakegu inferentzia forma hau:

$$\frac{}{Y \vee \neg Y}$$

Besteak beste, kasuak bereiztuz egiten diren frogen oinarrian dagoen arrazonamendua onargarri egiten duena matematikari klasikoarentzat. Lege honen arabera Y proposizio baterako edozein baldintzatan ondorioztatu daiteke $Y \vee \neg Y$. Intuizionista batentzat ordea, gauzak ez dira hain errazak, onartu ahal izateko Y edo $\neg Y$ frogatzea eskatuko bailuke, eta ikusi dugunez, hau ez da beti erraza izaten. Adibidez Goldbachen konjeturaren kasuan ezingo genuke onartu $Y \vee \neg Y$ bi parteetako baten frogarik ere ez dugulako.

Har ditzagun ukazio bikoitzaren inferentzia forma eta ukazio bikoitzaren ezabaketaren inferentzia forma:

$$\frac{X}{\neg\neg X} \qquad\qquad \frac{\neg\neg X}{X}$$

Bi hauek ere matematikari klasikoaren tresneria arruntaren artean kokatzen dira. Intuizionistarentzat, aldiz, lehenbizikoa onargarria den arren, hau da, proposizio baten froga emanda beti izango da posible honen ukazio bikoitzaren froga eraikitzea, bigarrena ez da baliogarria izango. Horren homologo intuizionistatzat har dezakegun inferentzia forma baliogarria beste hau izango litzateke:

$$\frac{X \vee \neg X \quad \neg\neg X}{X}$$

hau da, intuizionista batek proposizio baten ukazio bikoitzetik ezin du zuzenean proposizio hori ondorioztatu; bai, aldiz, proposizio horren edo bere ukazioaren froga bat izanez gero. Intuizionistarentzat, beraz, proposizio bat eta bere ukazio bikoitza ez dira baliokideak izango, ez dagoelako beti ziurtatuta baldintza berberetan biak baieztagarriak izango direnik.

Aurrekoaren ondorio garrantzitsu bat absurdura eramanezko frogak kontu handiz egin beharrekoak izatean datza. Izan ere ondoko bi inferentzia formak intuizionistarentzat, matematikari klasikoarentzat bezala zuzenak diren arren,

$$\frac{X \to (Y \wedge \neg Y)}{\neg X} \qquad\qquad \frac{\neg X \to (Y \wedge \neg Y)}{\neg\neg X}$$

ez da gauza bera gertatzen absurdura eramanezko hurrengo formarekin:

$$\frac{\neg X \to (Y \wedge \neg Y)}{X}$$

Orokorrean intuizionistarentzako absurdura eramanezko argudio onargarri bakarrak ondorio bezala ukazio batera daramatenak izango dira, matematikari klasikoarentzako ez bezala.

Kasuz kasuko argumentazio metodoari ere ezin zaio eutsi bere horretan:

$$\frac{X \to Y \quad \neg X \to Y}{Y} \qquad\qquad \frac{X \to Y \quad \neg X \to Y \quad X \vee \neg X}{Y}$$

ezkerrekoak matematikari klasikoaren kasuz kasuko argumentazio metodoa erakutsiko luke, intuizionistarentzat zuzena ez dena. Eskuinekoak, aldiz, kasukako argumentazio metodo intuizionistaren itxura zein den erakusten du.

Klasikoki baliokideak kontsideratzen diren hainbat formula ere ez dira intuizionistarentzat erabat baliokideak izango, batetik bestea inferitzea posible izan arren bestetik bata inferitzea ezinezkoa izateko zentzuan. Hona zenbait adibide[26]

$$\frac{\neg X \vee Y}{X \to Y} \qquad\qquad \frac{X \to Y}{\neg X \vee Y}$$

$$\frac{X \to Y}{\neg Y \to \neg X} \qquad\qquad \frac{\neg Y \to \neg X}{X \to Y}$$

$$\frac{X \to \neg Y}{Y \to \neg X} \qquad\qquad \frac{\neg X \to Y}{\neg Y \to X}$$

Antzerako zerbait gertatzen da kuantifikatzaileak dituzten inferentzia formekin:

[26] Ezkerreko zutabeko inferentzia formak matematikari klasiko zein intuizionistarentzat baliokideak izanik eta eskuineko zutabekoak, aldiz, matematikari klasikoentzat soilik.

$\exists x \neg Fx$	$\neg \forall x Fx$
$\neg \forall x Fx$	$\exists x \neg Fx$

$\forall x \neg Fx$	$\neg \exists x Fx$
$\neg \exists x Fx$	$\forall x \neg Fx$

Adibide hauek guztiak ikusita ondorioa begibistakoa da: hainbat froga daude klasikoki onargarriak izanik ere intuizionisten ikuspuntutik onartezinak direnak. Horietako batzurentzat posible izango da intuizionistentzat baliagarria den beste froga bat ematea, baina hau ez da beti gertatuko eta ondorioz badira matematikari klasikoarentzat baieztagarriak izanagatik intuizionistarentzat hala ez direnak, eta inoiz baieztagarriak izateko ere itxurarik ez dutenak. Honek erakusten du ikuspegi errealista alde batera uztearen prezioa zein den. Russellen paradoxak Fregeren programa burutuezina zela erakusten zuen, bateratu ezinak zirelako Fregeren ikuspegi errealista eta logikoa kontsideratu ahal izateko adina orokortasun duen hedaduraren nozioa. Ikuspegi errealista baztertu eta erredukzio logizistarako bide emango lukeen, eta nahikoa orokorra litzatekeen, hedaduraren nozioak ordea, matematika klasikoa justifikatzeko beharrezkoak liratekeen inferentzia printzipioak, bermerik gabe utziko lituzkeen proposizio matematikoen esanahiaren nozio batera eramaten gaitu. Ez da posible Fregeren moduko erredukzio bat Fregek buruan zeukan matematika klasikorako.

Intuizionistarentzat errealitate matematikoa ez da gugandik independentea, geuk sortzen dugu hartaz arrazonatzerakoan. Honek ez du esan nahi errealitate matematikoa subjektiboa denik edo matematikan edozein gauzak balio duela, badaudelako errespetatu beharrekoak diren lege orokorrak, gure arrazoimenari lotutakoak. Ezagutza matematikoaren *a priorizko* izaerari buruzko kuestioek errelebantzia oro galtzen dute ordea, errealitate matematikoaren izaerari buruzko ikuspegi berri honetatik.

Infinituari buruzko kontzepzioari dagokionean ere, matematika intuizionista, matematika klasikoa baino askoz hurbilago kokatzen da giza-esperientzia arruntetik. Infinitu potentziala ezagutu eta ulertzera iristeko moduen inguruko galderak ez dira hain gogorrak. Eta intuizionistentzat infinitu bakarra potentziala da. Intuizionistek onartzen dituzten eraikuntza bakarrak finituak dira: eragiketak beraiek ulergarriak dira eta hauek infinitu aldiz aplikatzearen ondoriozko emaitzarik ez da existitzen. Intuizionistek prozesu finitu oro kontsideratzerakoan idealizazio bat egiten dute, gizakiok ez baikara gauza, horretarako ere. Aldiz, hor sortzen diren galderak, berriz ere, ez dira konparagarriak ikuspegi errealistarentzat infinitu aktualak sortzen dituenekin.

Intuizionistentzat, finean, matematikaren inguruko zailtasun filosofikoak, ikuspegi errealista onartzeak berak sortzen ditu, eta hau baztertu bezain pronto desagertu egiten dira. Matematikari klasikoek ez dute ordea halakorik uste, eta ikuspegi intuizionistak gizakion mugak errealitate matematikoarekin nahasteaz gain, "gure logikaren [klasikoaren] hurbiltasuna, egokitasuna, sinpletasuna eta edertasuna falta" dituen matematika sortzen dute Quine-ren hitzetan[27].

1.1.4 Hilberten formalismoa

Aritmetikaren formalaren konsistentzia bide soilik finitistak erabiliz frogatzeko Hilbertek martxan jarri zuen programari esaten zaio *finitismoa*. 1934 eta 1939an Bernaysekin batera argitaratutako bi liburukiz osatutako *Grundlagen der Mathematik* [Hilbert & Bernays 1934-1939] lanean jasoa dator batez ere programa honen garapena. Hilberten matematikaren oinarrien inguruko lanik garrantzitsuena hau izanik ere, ez dugu ahaztu behar 1899an argitaratutako *Grundlagen der Geometrie* [Hilbert 1899], geometria euklidestarraren behin betiko aurkezpen axiomatikoa eman zuenean erakutsi zuela Hilbertek jadanik, esparru honetan zuen interesa. Lehen kapitulu honen 1.2.1 atalean metodo axiomatikoari buruz hitz egiten dugunean be-

[27][Quine 1970, 87. or.]

rrartuko dugu Hilbertek geometria euklidestarraen oinarrietan eginiko ekarpenaren deskribapena. Hilbertek oinarrien inguruan izandako hasierako interesa argitzeko balioko digu hemen, programa finitistaren garapena hobeto ulertzeko.

[Hilbert 1899]-an geometria euklidestarra errigore osoz garatzeko moduko sistema axiomatiko bat proposatu zuen, matematikarien ohiko hizkuntza erabilita, hau da, sinbolismo berezirik gabe bada ere. Lehenbiziko kapituluetan modu guztiz deduktibo batean Euklidesen geometriako emaitzak axiomatika berritik nola eratortzen ziren erakutsi ostean, azken kapituluetan, proposatutako sistema geometrikoa bera hartu zuen aztergai Hilbertek. Batetik sistema geometriko horren *konsistentzia erlatiboa* ezarri zuen, gero axioma desberdinen arteko dependentzia eta independentzia logikoen erlazioez jarduteko. Sistema geometrikoaren azterketa *metamatematikoak* ziren. Gerora bere programa finitista modelatuko zuten, sistema formalen azterketarako metodo metamatematikoek lan honetan izan zuten jatorria, eta hortik eboluzionatu zuen Hilberten metamatematikak.

Peanok aritmetikarentzako emandako axiomatikaren erakoa zen Hilbertek geometria euklidestarrarentzat emandakoa, sistema axiomatikoaren kontzepzioari zegokionean, Peanoren sinbolismo zorrotzik erabili ez bazuen ere. Hilberten sistemako jatorrizko kontzeptuek Peanok eskatutako ezaugarriak betetzen zituzten, hau da, sistemaren axiomek ezarritako hauen arteko erlazio eta propietateen bidez baino ez ziren definitzen kontzeptuok. Inplizituki definitu ere. Horrela, Hilbertek kontuan hartutako lehenbiziko gai metamatematikoa axiomen konsistentziarena izan zen, esan dugun bezala, hau da, axioma horien gainean eraikitako teoria kontraesanetik libre zegoela ikustea[28].

[28]Hilberten lanean logikan egindakoak pisu handirik ez duela badirudi ere, esanguratsua da 1900ean Parisen emandako ikerketa matematikoari buruz zuen kontzepzioaren inguruko hitzaldian, luzatutako 23 problema ireki nagusien artean nolabait logikari lotu dakizkiokeen hiru behintzat badirela. Egia da baita ere, *Grundlagen der Geometrie* 1899an argitaratuta kuestio hauek oso fresko zeudela Hilbertengan. Ikusi hitzaldi honen inguruko eztabaida eta erreferentzia [Kneebone 1963] liburuan.

Grundlagen der Mathematik-en hasieran bereizketa garrantzitsu bat egin zuen Hilbertek "sistema axiomatiko" kontzeptuak izan zitzakeen onartutako bi esanahien inguruan, sistema axiomatiko "konkretua" eta "formala", hain zuzen ere. Sistema axiomatiko *konkretuetan* ezagutza enpirikoetatik abiatzen da bat, eta hau sistematizatzen ahalegintzen da, tartean diren kontzeptuak idealizatuz eta ezaguna den horretatik oinarrizko printzipio batzuk aukeratuz, zeintzuetatik gainontzeko proposizioak deribatu ahal izango diren. Hau da Euklidesek geometrian aplikatu zuen metodoa, esaterako. Fenomeno baten ezagutza, hau gobernatzen duten printzipioak zeintzuk diren bereizteko adinako garapenera iristen denean, teoria estrukturatzeko balio du metodo honek Hilberten arabera.

Honen ondoan, ordea, sistema axiomatiko *formalak* leudeke, matematika hutsaren metodo gorena litzatekeena, eta inongo ezagutza enpirikorekin inongo loturarik ez duena. Era honetako sistema bat eraikitzeko jatorrizko ideia eta proposizio batzuk aukeratu behar dira, hauetatik modu formal batez ondorioak deduzitzeko, inongo interpretaziori erreferentziarik egin gabe. Esan beharra dago, hala ere, sistema axiomatiko formalak garatutako teoria matematikoak logikoki berregituratzen laguntzen zuten tresna bezala ikusten zituen Hilbertek eta ez emaitza berriak bilatzeko eta matematika zabaltzeko.

Grundlagen der Geometrie lanean erakutsi zuen Hilbertek sistema axiomatiko formal batek, berak eraikuntza batekin konparatzen zuenak, bazeukala ordea, sistema axiomatiko konkretuek ez zuten *esanguratasun* arazo bat, hauek ezagutza enpiriko batean oinarritzen zirenez, jakineko interpretazioa zutelako. Sistema axiomatiko formalek esanguratsuak izateko, estrukura horiek matematikaren alderdiren batean, errealizazio edo ereduren bat bazutela erakutsi behar zuten. Horretarako sistema axiomatiko formalaren jatorizko kontzeptuak ondo definitutako kontzeptu zehatzekin ordezkatuta, jatorrizko proposizioak egiazkoak direla erakutsi beharko litzateke; hau da, sistema formalean postulatutako entitateek osatutako multzoa, objektu matematiko zehatzen multzo baten bidez ordezkatu beharko litzateke, eta sistema formaleko konstante predikatibo eta funtzionalak, aukeratutako objektuen multzoan definitutako predikatu eta funtzio zehatzen bidez. Teoria formal baten eredua, beraz, teoriak karakterizatutako estruktura konkretua duen ondo definitutako sistema matematiko bat baino ez da. Hau zen Hilbertentzat sistema axiomatiko formal batek determinatutako teoria formal bat *esanguratsua* zela ikustea: eredu bat izateko modukoa den ikustea.

Hilbertek emandako sistema geometrikoaren konsistentziara itzulita, erabilitako metodoa, sistema axiomatiko formal horrentzako eredu aritmetiko bat eskaintzearena izan zen. Sistema geometrikoan kontraesanen bat deduzitzea posible bazen, beste horrenbeste gertatuko zen, ereduaren bidez kontraesana aritmetikara itzulita, aritmetikan. Era honetan, aritmetikaren konsistentzia frogatzea nahikoa izango zen bere geometria euklidestarraren konsistentzia frogatzeko. Geometriaren konsistentzia *absoluturik* ez, baina aritmetikarekiko konsistentzia *erlatiboa* ezartzea lortu zuen horrela Hilbertek. Axiomen arteko independentziaren inguruko kuestioak erantzuteko ere ereduez baliatu zen Hilbert: besteetatik independentea zela erakutsi nahi zuen axioma ez beste guztiak betetzen zituzten eredu aritmetikoak eraikitzea nahikoa zuen, axioma horren gainontzekoekiko independentzia erakusteko.

Sistema axiomatiko formalen esanguratasunerako beharrezko diren ereduak eraikitzea horretarako indibidualen domeinu finitu bat baino behar ez denean filosofikoki onargarria bada ere, urrats kopuru finitu batean eraiki daitezkeelako, ez da gauza bera gertatzen beharrezko domeinu hori infinitua denean. Eredua eraikitzeko beharko genukeen domeinu infinituaren existentzia bera, hau erabilita justifikatu nahi den sistema axiomatiko formalaren existentzia beraren pareko problema litzatekkelarik. Eta argi dago matematikan, kasu gutxi batzuk kenduta, gehinetan domeinu infinituak dituzten ereduak behar izaten direla. Hilbertek zenbaki arrunten multzoa erabili zuen beste esparru batzuen konsistentzia erlatiboak frogatzeko ereduak eraikitzeko, eta ondorioz, multzo hau gure pertzepzioari zuzenean eskainitako objektu bezala erakusteko modu bat aurkitu nahi zuen, (peanorena bezalako) sistema axiomatiko batean oinarrituz sortuko litzaizkiokeen zirkularitate problemak saihesteko[29]. Teoria formalentzat ereduak eraikitzeko baliatutako esparruak era honetako kuestioak saihestu beharra zuela ikusi zuen Hilbertek[30] eta intuizioak zuzenean jasotzeko modukoa izan behar zuela. Infinitu aktualaren aukera baztertuta arrazonamendu matematiko infinitarioak gordetzeko balioko zuen sistema finitarioa asmatu zuen Hilbertek metamatematikan.

|, ||, |||, ||||,... makilatxoen zerrenda erabili dezakegu hori nola egin zuen ikusteko. Makilatxo bat eman ostean, zerrenda honetako hurrengo objektua, aurrekoari makilatxo bat erantsiz lortzen da. *Numeral* deituko ditugu makilatxoen bidez eraikitako ikurrok eta hizki gotikoz adieraziko ditugu metaproposizioetan. Edozein bi numeral beren luzeraren arabera konparatu ditzakegu. Numeral bakoitzean aldiko makilatxo bat ezabatuta urrats kopuru finitu batean bi numeralak luzera berekoak diren edo ez erabaki dezakegu eta hala ez izatekotan, bietako zein den luzeagoa. Numeralen gaineko orden erlazio bat defini dezakegu horrela, $A < B$ izanik A numerala B numerala baino motzagoa denean. Bi numeralen arteko batuketa definitzeko nahikoa da $A + B$ numerala A eta B numeralen konkatenazio bezala definitzea, hau da, bataren eta bestearen makilatxoak bata bestearen segidan jartzea. $A \cdot B$ biderkadura berriz B-ren makilatxo bakoitza, A-ko makilatxo guztiez ordezkatzean lortutako numerala bezala defini daiteke.

Teoria axiomatiko formalen errealizazioak eraikitzeko elementuen domeinu ezhipotetiko bat izateko, errealizazio horietan behar izango ditugun propietate aritme-

[29] Zenbaki arruntenten sistema axiomatiko honek ere gainontzekoek bezala eredu bat behar izango baitzuekeen.

[30] Honetan datza Hilberten azken lan metamatematikoak lehenbizikoekiko duten desberdintasun nabarmenena.

tiko guztiak frogatu beharko genituzke, emandakotik harago ez doazen arrazonaketak erabilita. Arrazoiketa modu ez-hipotetiko honi deituko diote Hilbert eta Bernaysek "inferentzia finitario". Bi ezaugarri nagusitan laburtu dezakegu. Batetik objektu bati buruz hitz egiteko beharrezkoa da hau eraiki ahal izatea, eta bestetik, urrats kopuru finitu batean amaitu ezinezko definizio edo kalkulurik ez da onartuko, eta gainera urrats kopuru finitu hau ere mugatu daiteke.

Honenbestez, ikus daiteke orain arte numeralei lotuta eman ditugun definizioak *finitarioak* direla. Horrez gainera aritmetikan ezinbestekoak diren indukzio matematikoaren bidezko frogapenerako prozedura eta errekurtsio bidezko definiziorako prozeduraren interpretazio finitarioak eman ditzakegu. $P(n)$ teorema baten indukzio bidezko froga batek edozein N numeral zehatzetarako mugatu daitekeen urrats kopuru finitu batean $P(N)$ konprobatzeko modua eskaintzen digu. Antzera $f(n)$ funtzio baten definizio errekurtsibo batek, edozein N partikularretarako, mugatu daitekeen urrats kopuru finitu batean $f(N)$ ebaluatzeko modua ematen du. Prozedura hauen bidez, posible da termino finitarioetan, batuketa eta biderketaren elkarkortasuna, trukakortasuna eta banakortasuna ezartzea eta, besteak beste, zenbaki lehenaren kontzeptua sartuta *aritmetikaren teorema fundamentala* frogatzea.

Kuantifikatzaileak dituzten proposizioekin lan egiterakoan agertzen dira lehenbizi ikuspegi finitarioa hartzeak derrigortutako limitazioak. Unibertsalki kuantifikatutako $\forall x P(x)$ moduko proposizioak interpretatzeko modu bakarra, N edozein numeral hartuta $P(N)$ finitarioki egiazkoa dela erakustea posible izatearena baita. Existentzialki kuantifikatutako $\exists x P(x)$ proposizioen kasuan, berriz, $P(N)$ betetzen duen N numeral bat ezagutzen den kasuan soilik beteko dela ulertzen da, edo kasurik okerrenean urrats kopuru finitu baten buruan propietate hori beteko duen numeral bat kalkulatzeko prozedura bat ematen denean. Gauzak okerragoak dira kuantifikatutako proposizioen ukazioekin. $\neg\exists x P(x)$ formako proposizioen kasuan, interpretazio finitariorik naturalenak, edozein N numeraletarako $P(N)$ faltsua dela esaten du. Kasu horretan ordea $\exists x P(x)$ eta $\neg\exists x P(x)$ bi proposizioek ez dute zertan kasuistika osoa eman, hau da, ez litzateke matematika arruntean ezinbestekoa den *tertio excluso* lege klasikoa betekoa, izan ere, oso posible delako $P(N)$ betetzen duen N numerala existitu arren urrats kopuru finitu batean determinatzeko modurik ez ezagutzea. Antzerako zerbait esan daiteke unibertsalki kuantifikatutako proposizioen kasuan.

Ikusitakoarekin argi geratzen da Hilbert eta Bernaysek proposatutako arrazonamendu finitarioaren bidez teoria formalentzat errealizazioak eskaintzerakoan lortutako segurtasuna, matematika arruntaren logika klasikoarekiko inferentzia ahalmenaren ahultze garrantzitsu batekin ordaintzen dela. Gainera galera honekin ohiko aritmetikarekin pareka daitekeen (bai emaitzei dagokienean, bai inferentzia erraztasunari dagokionean) teoria finitariorik lortzea ezinezkoa dela ikusten da. Aritmetika finitarioak ezingo luke, beraz, aritmetika arruntarentzako eredurik eskaini. Metamatematikarako baliabide interesgarria dira, hala ere. Potentzialki infinitua den objektuen sistema bat eskaintzen baitute, bide finitarioen bidez tratatu daitezkeen propietate asko eskainiz.

Teoria axiomatiko formal baten errealizagarritasunaren bidezko esanguratasunaren kuestiora itzuliko gara orain. Lehen ere esan dugu, era honetako teoria batentzat eredu finitu bat ematen dugunean, teoria honen esanguratasuna bermatzen dugu hitzaren adierarik gogorrenean. Halakorik ezin denean, numeralen sisteman oinarritutako eredu infinitu bat, bide finitarioen bidez eraikitzeak ere, teoriaren esanguratasuna erakusteko balioko luke hasiera batean. Baina teoria formal baten esanguratasuna karakterizatzeko ahalegin hau ere antzua suertatuko da, eta teoria formal baten esanguratasunaren karakterizaziorik ahulenarekin geratu zen Hilbert, azkenean. Teoria baten *konsistentzia frogagarria*, hain zuzen ere. Ezaugarritze honetan oinarritu zuen *finitismo* deitutako bere filosofia formalista. 1899an ez bezala *Grundlagen der Mathematik*-eko Hilberten kontzepzio honen arabera teoria axiomatiko formal bat esanguratsua izateko nahikoa zen bere axiometatik kontraesan bat deduzitzeko aukerarik ez zegoela bide finitistak erabiliz frogatzea. Teoria matematiko formalen konsistentzia finitarioki frogatzean zetzan, Hilbertentzat, teoria honek estruktura esanguratsu bat definitzeko baldintza. Bide finitista "seguruak" erabiltzeko hautuan datza *Grundlagen der Geometrie*-n Hilbertek kuestio metamatikoen eginiko lehen ekarpenen eta *Grundlagen der Mathematik* Bernaysekin batera oinarrien inguruan bere filosofia formalista aurkeztuz emandako lan nagusiaren arteko bereizketa nagusia. Lehenbizikoan geometria euklidestarraren aurkezpen axiomatiko bat eman ostean ohiko arrazonamendu matematikoa baliatu zuen sistema honen ezaugarri metamatematiko batzuk agerian jartzeko, nagusiki geometriaren aritmetikarekiko konsistentzia erlatiboa. Bestean, ordea, asmo nagusia ohiko jardun matematikoa justifikatzea zen eta horretarako ohiko matematika zehatz-mehatz jasoko zuen *sistema formal* baten konsistentzia bide finitarioak erabilita frogatu nahi izan zuen Hilbertek.

Hilberten ikuskeran teoria matematiko bat jasotzen zuen sistema formal bat, errepresentatzen zuen teoriaren "bertsio sintaktikoa" izan behar zuen. Postulatutako elementuen domeinu bat, hasierako *formula* multzo finitu bat eta esplizituki zerrendatutako deribazio erregela kopuru finitu batez osatua behar zuen. Sistema formaleko formula deribagarriak hasierako formuletatik deribazio erregelen aplikazio kopuru finitu baten bidez lortzen zirenak baino ez lirateke izango. Hasierako teorian frogagarria den teorema orok sistema formalean bere "bertsio sintaktikoa" duela ikustea posible izango balitz, sistema formalaren konsistentzia sintaktikoa frogatzea nahikoa litzateke, honek ordezkatutako teoria axiomatikoa justifikatzeko, hau da, Hilberten zentzu ahulean esanguratsua zela erakusteko. Gödelek frogatu zuen hau predikatuen kalkuluarentzat 1930ean.

Sistema formalek teoria matematikoak errepresentatzen zituzten heinean, hauetan ohikoak ziren arrazonamendu infinitarioen pareko liratekeen deribazio erregela infinitarioak jaso beharko lituzkete. Hilbertentzat ordea intuitiboki hau horrela izanik ere sistema formalak, hauen baitako deribazio guztien osotasun bezala hartuta, modu konstruktiboan eraikiak zeudela eta metodo finitarioen bidezko eztabaida onartzen zutela kontsideratu zuen. Ohiko teoria matematiko infinitarioen justifikazio metamatematiko finitario bat eskaintzeko asmoa zuen Hilberten programak.

Hilbertek erakutsi zuen matematika klasikoa bere baitan jasotzen duen I sistema formal baten konsistentziaren froga finitario bat emateko gauza izateak, I sistema hori matematika finitarioaren *hedadura kontserbakorra* izatea lekarkeela. Hau da, matematika klasikoan deribatu daitezkeen, eta beraz I sisteman formalizatu daitezkeen, eta ikuspegi finitista batetik esanahia duten proposizio guztiak, bide finitarioak erabilita justifika zitezkeela.

Gödelen lehenbiziko teoremaren arabera, matematika klasikoa bertan jasotzeko adinako S sistema formal batek, konsistentea izatekotan ez-osoa izan beharko luke, hau da, S sistemaren baitan proposizio *erabakiezinak* aurkitu ahal izango genituzke: bai bera eta bai bere ukapena sistema horretan deribaezinak izanik. Gödelen frogaren ideia intuitibo bat ematen saiatuko gara. Honen arabera S "behar adina ahaltsua" litzatekeen sistema formal bat izanik, orduan posible litzateke bere baitan S beraren propietate sintaktikoei buruz zerbait esaten duten proposizioak deribatzea posible litzateke. Bi gauzaren menpekoa da hau egiteko aukera. Batetik posible da sistema formal baten propietate sintaktikoak zenbakizko terminoetan adieraztea: objektu sintaktikoak zenbakiak bezala eta propietate sintaktikoak zenbakien teoriazko propietate moduan. Bestetik, nahikoa ahaltsua den sistema formal batean posible da zenbaki arrunten inguruko oinarrizko proposizioak ezartzea. Bi hauetatik ondorioztatzen da behar adina ahaltsua den sistema formal batean posible dela sistema berari buruz zerbait "dioten" proposizioak deribatzea. Gödelek bere buruaren frogaezintasuna baiezten zuen G_S proposizio formal bat kontsideratu zuen behar bezain ahaltsua zen S sistema formal batean. S-n deribagarria al da G_S proposizioa? S sistema formal *zuzen* bat izango balitz, hau da, bertan deribagarria den edozein proposizio, S-ren edozein eredu edo errealizaziotan egiazkoa izango balitz, G_S S sisteman deribaezina izango litzatekela ikusi daiteke. Deribagarria izango balitz faltsua izango litzateke, deribagarria ez dela "esaten" duenez, baina hau S sistema zuzen bat izatearen aurkakoa litzateke. Beraz G_S ez da S-n deribagarria, eta horixe bera "esaten" duenez egiazkoa litzateke, gainera, eta $\neg G_S$ faltsua. Eta S-ren zuzentasunetik, $\neg G_S$ S-n deribaezina. Ez G_S eta ez $\neg G_S$, ez lirateke beraz deribagarriak S sisteman, hau da, *erabakiezinak* lirateke eta S sintaktikoki ez-osoa litzateke. Berez Gödelen frogan ez litzateke S-ren zuzentasunik beharko ondorio berera iristeko, argudioa konplikatuz.

Hilbertek ez zuen inola ere horrelako emaitzarik espero, baina hala ere bere programak lehenbiziko emaitza hau saihestea lortzen duela ikus dezakegu. Izan ere, Hilbertek matematika klasikoa jasoko zuen sistemaren osotasunean pentsatzeko hiru arrazoi nagusi baitzituen: batetik *tertio excluso* legearen zuzentasuna; bestetik, egia matematiko oro frogagarria izatearen konbikzioa; eta azkenik, matematika klasiko infinitarioaren arrazonatzeko forma eta kontzepzioak sistema formal batean jaso ziztezkeelako ustea. Lehenbizikoa eta azkena Hilberten programak zentzua izateko derrigorrezko baldintzatzat har ditzakegun bitartean, posible da bigarrena programa alboratu gabe baztertzea. Hau da, zergatik ez da posible izango, frogatu ezin diren egia matematikoak izan arren, infinitarioki justifika daitekeen proposizio erreal oro, bide finitarioak erabiliz ere justifikagarriak izatea? Izan ere, Hilberten programaren helburua ez baita, matematika klasikoak edozein egia matematiko frogatzeko bidea ematen duela erakustea, baizik eta, matematika klasikoak problema bat soluzionatzen badu, soluzio hori zuzena dela erakustea[31].

Gödelek bigarren teorema bat ere eman zuen ordea, lehenengo teoremaren ondorio garrantzitsu bat zena, eta honek bai, Hilberten programaren gainean laino beltzak jartzeko balio izan zuena. Lehenbiziko teoreman, esan dugunez, sistema formal bat behar adina indartsua izanez gero, bere Gödelen proposizioa bere baitan frogatu ezina

[31] Eztabaida zabalagoa izateko ikusi [Kneebone 1963, 161-165 or.] eta Gödelen teoremen frogapen zehatzak ikusteko logika matematikoko edozein testuliburu klasiko har daiteke, esaterako [Mendelson 1964].

da. Eta horixe da, hain zuzen ere, G_S proposizioak dioena, Sn frogatuezina dela. S-ren konsistentziak G_S-ren egiazkotasuna inplikatzen du, beraz. Arrazonamendu hau, berau, S sisteman formalizatu daitekeela ikusi zuen Gödelek, hau da, S sisteman $Q \vdash G_S$ deriba zitekeela, non, Q proposizioak S konsistentea dela adieraziko lukeen. Gauzak horrela, S-ren baitan S beraren konsistentzia frogatzeko gauza izanez gero, *modus ponens* bitartez G_S deribatuko genuke S-n. Lehenbiziko teoremak, ordea, S-n G_S deribatu ahal izanez gero, S inkonsistentea litzatekeela esaten du, beste era batera esanda, S konsistentea izanez gero, konsistentzia hori ezingo litzatekeela S-n frogatu. Hauxe da, hain zuzen ere aipatutako Gödelen bigarren ez-osotasun teorema: *behar bezain indartsua den S sistema formal bat, konsistentea baldin bada, S-n ezin da bere konsistentzia frogatu.*

Lehenbiziko ez-osotasun teoremak ez bezala, bigarrenak zuzenean Hilberten programaren funtsa kolokan jartzen zuen. Ikusi dugun bezala, matematika klasikoa jasoko lukeen I sistema formalaren konsistentzia bide finitarioak erabiliz frogatu ahal izatearen gorabeheran baizetzan programa osoa burutu ahal izatea. Baina era honetako froga bat ematea lortuz gero, frogapen hau I sistemaren baitako I ren konsistentzia baieztatuko lukeen deribazio formal batera eraman ahal izango litzateke. Eta bigarren ez-osotasun teoremak, I konsistentea den heinean, hau ezinezkoa dela esaten digu. I konsistentea izatekotan, aukeratu beharra daukagu, bigarren teorema honen arabera: arrazonamendu finitario osoa ezin da I sistemaren baitan formalizatu edo ez da Iren konsistentziaren froga finitariorik existitzen. Bigarren kasuan Hilberten programa burutuezina izango litzateke.

Hala ere, esan beharra dago, Hilbertek ez zituela baliabide finitistak behar bezala esplizitatu eta ondorioz, bigarren ez-osotasun teoremak sortzen duen dilema, erantzun ezina dela. Izatekotan ere, erantzun partzialak baino onartuko ez dituena. Hau guztia dela eta, bigarren ez-osotasun teoremak Hilberten programa finitistari gainditu ezinezko oztopoak jartzen dizkiola onartzen da orokorrean. Hilberten programa finitistak ez zuen lortu bilatutako bateratzerik matematika klasiko eta intuizionistaren artean. Ikuspegi filosofiko desberdin hauetako bakoitzak, bere erara moldatu eta interpretatu ditu Gödelen emaitzak, beren aldeko ebidentzia bezala erakutsiz. Matematika klasikoari intuizionistek egindako kritika neurri batean onartuz, aukera bat, matematika klasikoko emaitzak esanahairik gabeak, baina kalkulu finitarioak aurresateko modukoak direla onartzea izan da, beti ere metodoak seguruak ez direla onartuta, eta garantia bakarra, adibidez, ZFC-n orain arte kontraesanik aurkitu ez izana izanik. Beste aukera bat izan da, Hilberten programa partzialki bada ere bururaino eramaten ahalegindu direnena: Gödelen emaitzak matematika infinitarioa matematika finitariora erabat erreduzitu ezina dela erakusten duela kontutan hartuz, matematika infinitarioaren zein parte den matematika finitariora eraman daitekeenik handiena ikusten saiatzea[32].

1.2 Matematikaren barne oinarriak

Edozein azterketa esparru handik bezala, matematikak ere badauzka azpiesparruak. Azpiesparru bakoitzak badu bere egitura kontzeptuala, baina guztiak matematikaren parte diren heinean, elkarren artean lotura asko daude, matematika eta gainontzeko giza jakintzaren artean bezalaxe.

Matematikaren barne oinarriek, matematikaren egitura eta hierarkizazio kontzeptuala agerian jartzea bilatzen dute, modu honetan teoria matematiko edo matematikaren azpiesparru desberdinak modurik sinpleenean aurkezteko bidea bilatuz, eta ahal den neurrian, matematikaren parte deberdinen arteko erlazioak eta elkarrekintzak aztertuz, hasieran heterogeneoak diruditen zelaien arteko batasuna zertan datzan ulertzeko asmotan.

---

[32] [Simpson 1988, 353. or.].

Historian zehar etengabeko dinamika bat egon da, guk deskribatu dugun zentzuan, matematikaren barne oinarrien bilaketan, emaitza matematiko ezagunak hobeto ulertu nahiak bultzatutako orokortze, abstrakzio, sinplifikazio eta sistematizazio ahaleginen baitan[33]. Jadanik greziarren garaian Euklidesek geomeriaren azterketa erabat berrantolatu eta sistematizatu zuen *metodo axiomatikoan*[34] oinarrituta. Arreta erakartzen du, adibidez, Schwartz Bourbakitarrak, azken honen sorrerari buruz hitz egiterakoan egiten duen Euklidesen goraipamena:

> [...] Borelen bilduman aurki daitezkeen liburuek, eleberriak dakarzkigute gogora... Testu greziarrak, Borelen bildumako testuak, Lebesguren idatziak, edo zazpigarren eta zortzigarren mendeko testuak baino askoz zorroztasun handiagoarekin idatziak daude. Euklidesen edo Arkimedesen, Siziliako greziar bat berau, idatziak ur garbia bezain gardenak dira. Lema, teorema eta korolarioek aparteko ordenean jarraitzen diote elkarri eta batak besteari eginiko erreferentzietan ez dago zalantzarako tarterik.[35]

Euklidesek egindako metodo axiomatikoaren erabilera zen Schwartzen konparaketari bidea ematen ziona. XIX. mendeko azken urtean Hilbertek [Hilbert 1899] argitaratutako *Grundlagen der Geometrie* lan klasikoan erakutsiko zen metodo axiomatiko modernoak zuen irismena esparru matematiko jakin baten oinarriak jartzerakoan, Euklidesen formulazioa zorroztuz, eta honen izaera berrituz[36]. Garai hartako matematika alemaniarraren beste ekarpen garrantzitsu bat, Dedekind eta Cantorrek modu

[33]Ikusi [Mac Lane 1986], bereziki 12. kapitulua, garapen matematikoaren dinamikaren azterketa zehatzago bat ikusteko.

[34]Egia da Euklidesen metodo axiomatikoa ez zela gaur egun ezagutzen duguna eta Hilbertek [Hilbert 1899] erabilitakoaren zorroztasun estandarretara iristen, baina Euklides ia-ia hutsetik abiatzen zela jakinda, uler dezakegu Euklidesen *Elementuek* matematikaren sistematizazioan suposatutako aurrerakadaren zenbatekoa.

[35][...] The type of book found in the Borel collection, reminiscent of novels... The Greek texts are written with infinitely more precision than the texts of the Borel collection or Lebesgue's writings, or the texts of the seventeenth and eighteenth centuries. The writings of Euclid or of Archimedes, a Greek from Sicily, are as limpid as pure water. The lemmas, theorems and corollaries follow each other in impecable order and refer to each other with no possible ambiguity. [**?**, 149. or.].

[36]Gogoan edukitzekoa da axiomen izaeraren inguruan Hilbertek eta Fregek izandako eztabaida, Fregek, axiomak Euklidesen erara, egia ebidenteak bezala hartzen zituen bitartean, Hilbertek lehenbiziko aldiz, axiomen ikuspegi formal eta definitorio bat ekarri zuen, objektu matematikoen existentzia, konsistentzia logiko hutsarekin berdinduz.

independentean garatutako multzoen teoria izan zen. 1832an Galoisek aurkitutako estruktura aljebraikoak zabaltzeko hizkuntza egokia ezartzeko balio zuena. Galoisen estruktura aljebraikoek, Hilberten metodo axiomatikoak, eta Cantor eta Dedekinden multzoen teoriak[37] bat egin zuten, nola ez, Gottingenen bertan, aljebra modernoaren sorreran. Hortik edango zuen Bourbakik, aipatutako Frantziako matematikaren panorama iluna iraultzeko asmotan, matematika osoa "aljebraizatzen" saiatuz, van der Waerdenen 1930eko *Moderne Algebraren* [Van der Waerden 1930-1931] irudira.

Schwartzek Euklidesen eta Bourbakiren ekarpenak parekatzen ditu, garaiko matematika berrantolatu eta berritu izanagatik. Hirugarren kasu bat ere presezki aipatzen du aurreko biekin batera: XIX. mendean zehar eman zen eta jadanik aipatu dugun *analisiaren aritmetizatzea*, hain zuzen ere. Agian hain esanguratsuak izatera iritsi gabe, beste adibide bat ere jarriko dugu: gerora Newton eta Leibnizen kalkulu diferentziala eta integrala agertzea posible egin zuen, Fermatek eta bereziki Descartesek XVII. mendean abiatutako *geometriaren aljebraizazioa*.

Aljebra modernoaren sorrera eta Bourbakiren ekarpena da guzti hauetatik guk jarraitu nahi dugun ildoarekin zerikusi handiena dutenak, eta hauek hurrengo kapitulurako utziko ditugu zehaztasun handiagoz aztertzeko. Kapitulo hau bukatzeko berriz, aipatutako gainontzeko adibideak aztertuko ditugu, matematikaren barne oinarrietan eginiko benetako ekarpenak diren heinean.

1.2.1 Euklidesen *Elementuak* eta metodo axiomatikoa

Historiari begiratuta esan daiteke greziarrak izan zirela geometria zientzia deduktibo bezala tratatu zuten lehenengoak. Ekialde hurbileko zibilizazio desberdinek, greziarren aurretik izandako ezagutza geometrikoak, batez ere, arkitektura, agrimen-

[37] 1908an Zermelok, oinarrien krisia aztertzerakoan ikusi dugunez, *Russellen paradoxari* ateak ixteko moduan, diseinatutako sistemak behar adinako "segurtasuna" eskaintzen zuelarik [Zermelo 1908].

sura eta astronomiako beharrak asetzeko, angelu, figura lauen azalera nahiz gorputz sinpleen bolumenen kalkularako printzipio praktikoetara mugatzen ziren. Greziarrek, eta bereziki Euklidesen *Elementuetan* teoria antolatzeko moduak, ikaragarrizko jauzi kualitatiboa suposatu zuen, matematika (geometria) egiteko eta ulertzeko moduan [Coolidge 1940].

Denborarekin, jasotako ezagutza geometrikoak aplikatu zekizkiekeen objektuen multzoa areagotu ahala, printzipio geometrikoak modurik orokorrenean formulatzeko beharra ikusi zen, geometrian konkretutik abstrakturako bideari ekinez. Disziplina enpiriko praktikoa izatetik zientzia deduktiboaren paradigma bilakatzera pasako zen geometria, behaketan oinarritutako proposizio gutxi batzuetatik gainontzekoak logikako legeetan oinarritutako dedukzioetan oinarritu zitezkeela konturatu ahala.

Geometriako proposizioen lehen aurkezpen sistematikoa Euklidesen *Elementuak* dira. Euklidesen *Elementuek* mugarri bat suposatuko dute bide horretan, eta orokorrean, matematikaren historian. Hauxe dio, adibidez, Schwartz Bourbakitarrak Euklides aipatuz, bere autobiografiako Bourbakiri buruzko atalean:

> Grezian Euklides matematikariak (edo matematikari taldeak) *erabat berrantolatu* zuen geometriaren azterketa, gutxi gorabeherako metodo axiomatiko bati eta oso estilo zorrotz bat erabilita. Testu greziarrak, Borelen bildumako testuak, Lebesguren idatziak, edo zazpigarren eta zortzigarren mendeko testuak baino askoz zorroztasun handiagoarekin idatziak daude. Euklidesen edo Arkimedesen, Siziliako greziar bat berau, idatziak ur garbia bezain gardenak dira. Lema, teorema eta korolarioek aparteko ordenean jarraitzen diote elkarri eta batak besteari eginiko erreferentzietan ez dago zalantzarako tarterik.[38]

[38] In Greece, the mathematician (or group of mathematicians) Euclid *completely reorganized* the study of geometry, thanks to a more or less axiomatic theory and a very precise style. The Greek texts are written with infinitely more precision than the texts of the Borel collection or Lebesgue's writings, or the texts of the seventeenth and eighteenth centuries. The writings of Euclid or of Archimedes, a Greek from Sicily, are as limpid as pure water. The lemmas, theorems and coro-

Euklidesek ekarritakoa izan zen, Schwartzen arabera, matematikaren historian izandako lehen berrantolaketa handia. XIX. mendean emandako eta lan honen 1.2.3 atalean aztertuko den analisiaren aritmetizatzea aipatzen du bigarren erreforma nagusi bezala, nahiz eta hau ez iritsi Euklidesena edo segidan landuko duen, eta matematikaren historiako hirugarren erreforma handia bezala kontsideratzen duen Bourbakirenera[39].

Euklidesek matematikara ekarritako lehen sistematizazio (ezagun) handia, azken batean, axiomatizazioan oinarrituko da. Prozesu hau burutzeko, orokorrean, gai jakin baten inguruko teorema "guztien" zerrenda, aukeratutako zerrenda txikiago batetik deduzitzeko modua erakutsi behar izaten da, kasu horretan, aukeratutako zerrenda horrek, teoria horren axioma eta postulatu zerrenda osatuko dituelarik. Prozesu hau modu desberdinetan egin daiteke, eta horregatik, posible da teoria batek axiomatizazio bat baino gehiago izatea[40]. Axioma zerrendaren aukeraketa egoki batek, teoriaren egituraketa sinple bat, eta honen ondoriozko teoriaren ulermen sakonago bat eskain ditzake.

Euklidesen lanean agerian geratzen den ideia garrantzitsu bat da frogapenarena eta honekin teorema edo proposizioarena. Hau ez zen izan Euklidesen ekarpen bat. Bai ordea matematika greziarrarena. Platonen elkarrizketetan ikus daiteke, besteak beste, K.a. VI. mendearen aurreko greziarrek lehenbizi erakutsitako, dedukzio logikoen kateak. Geometrian eta aritmetikan ez ezik, giza jakintzaren edozein esparrutan aplikatu zitezkeenak, bestalde. Hauen arabera, p proposizio batekin ados egoteak, "beharrezkoa" egiten zuen q beste proposizio batekin ere ados egotea ondorio izanik. Greziarrek ikusi zuten egiptoar eta babiloniarrengandik zetozkien aritmetika eta geometriarako erregelak, bata bestearekin erlazionatzeko modua ematen zuela

llaries follow each other in impecable order and refer to each other with no possible ambiguity. [Schwartz 1997]. Guk ingelesezko itzulpenetik hartu dugu zita: (2001), 149. or.

[39] Guk ere landuko dugu Bourbakiren kasua 2.2.1 atalean.

[40] Gogoratu ZFC eta BNG multzo teoriarako axiomatika desberinak, esaterako.

arrazonatzeko modu deduktibo honek. Arrazonamendu hauek izango dira gerora, teoremak, bata bestearekin erlaziona arazten dituzten frogak. Platonen eta Aristotelesen testuen aurki daitezke lehenbiziko froga matematikoak[41].

Platonek *Errepublikako* (VI, 510, c, d) pasartean dedukzio kate baten bidez froga bat emateko modua deskribatzen du:

> Geometriaz eta kalkuluaz arduratzen direnak bakoitia eta bikoitia, irudiak eta hiru klasetako angeluak suposatzen dituzte [...] Ezagutuko balituzte moduan, suposatutzat hartzen dituzte, eta hortik aurrera ez zaie iruditzen hauen inguruan azalpen gehiago eman beharrik dutenik, ez euren buruari eta ez beste inori, edozeinentzat begibistakoak bailiran; areago hauetatik abiatuta gainontzekoa zeharkatzen dute bata bestetik ondorioztatuz, azterketaren helburua zen hartan amaitzeko.[42]

Garai guztietako arrazonamendu matematikoaren osagai garrantzitsu bat jasotzen du hemen Platonek[43].

Platonek arrazonamendu deduktiboaren jatorrian jartzen dituen “hipotesiak”, aldi berean, aurreragoko “hipotesi” batzuetatik aurrez deduzituak izaten dira. Jakina da, ordea, atzerako erregresio hau ezin dela infinitua izan eta prozesua halakoren

[41] Platonen *Menon* elkarrizketan, adibidez, emandako karratu baten azalera bikoizten duen karratua lortzeko, lehenbizikoaren diagonala aldetzat duen karratua eraiki eta honek eskatutako propietatea betetzen duela frogatzen da. [Dieudonne 1987]-k aipatua.

[42] Los que se ocupan de geometría y de cálculo suponen lo impar y lo par, las figuras y tres clases de ángulos [...] Como si las conocieran, las adoptan como supuestos, y de ahí en adelante no estiman que deban dar cuenta de ellas ni a sí mismos ni a otros, como si fueran evidentes a cualquiera; antes bien partiendo de ellas atraviesan el resto de modo consecuente, para concluir en aquello que proponían al examen. *Errepublika* (VI,510,c,d), guk gaztelerazko argitalpen bat erabili dugu: C. Eggers (1986), Madril: Gredos.

[43] Parte bat diogu, arrazonamendu deduktiboa, ez delako, arrazonamendu matematikoa agortzera iristen. Arrazonamendu tipo desberdinak erabiltzen dira matematikan, zeregin desberdinetarako. Axiomatizazioarena teoria baten azken fasean, hau aurkezteko modu sistematiko bat ematearekin lotuta agertu izan da beti, eta ez, ikerketa matematikorako lan tresna moduan. Dieudonnéren hitzak erabiliz, matematikaren *erretagoardian.*

batean amaitu beharko dela. Horixe da hain zuzen ere geometriako teoremak antolatzeko beharrak eskatzen duen lehenbiziko urratsa. Beharrezkoa da, prozesua bukatuko bada, frogatu gabeko hipotesi batzuetan amaitzea. *Elementuen* hasieran, "definizio" batzuren ostean, era honetako, frogatu gabeko baieztapenen zerrenda bat ematen da, gaur egunean geometria euklidearreko axiomak deitzen direnak. Bi klasetan sailkatzen ditu Euklidesek baieztapen hauek. Batetik *postulatuak* daude, geometria lauaren propietateak direnak, eta bestetik nozio komunak, edozein eratako "magnitudeei" dagozkienak.

"Definizio", "postulatu" eta "nozio komunetatik" abiatuta, metodo deduktiboaren bidez "objektu matematikoen" propietateak ordenean[44] garatuz eta zerrendatuz doaz, *Elementuetan*.

Egia da, bestalde, XIX. mende amaieran Paaschek geometrian eginiko lanen ondorioz eta bereziki Hilbertek *Grundlagen der Geometrie* [Hilbert 1899] lana aurkeztu zuenetik, matematika modernoan zabaldutako metodo axiomatikoaren zorroztasunik ez duela Euklidesen arrazonamenduak. Batetik, seguruenez konturatu gabe, metodo axiomatikoak agindutakoaren kontra, aurrez onartutako edo frogatutako proposizioetan baino, intuizio espazialean oinarritutako intuizioak iradokitako propietateak darabiltza, sarritan. Honen adibide argi bat aurki dezakegu, lehen proposizioan, bertan. Emandako AB zuzenki bat aldetzat duen triangelu aldekidea edo ekilateroa eraikitzeaz dihardu proposizio honek. Horretarako AB erradioko bi zirkunferentzia marrazten ditu Euklidesek, bata A puntuan zentratutakoa eta bestea B puntuan zentratutakoa. Hori egin ostean, bi zirkunferentzien bi ebaki puntuetako bat, edozein, C bezala izendatuta, ABC triangelua aldekidea dela frogatzen du. Horretarako, ordea, bi zirkunferentziak gutxienez puntu batean ebaki behar diren propietatea darabil. Hau, Euklidesek egiten duen moduan, eraikuntza geometrikoa marraztuz

[44] Hau da, Aristolesek esandakoari jarraituz, aurrez onartu edo frogatutakoetatik, berriak deduzituz, silogismoak erabilita.

gero, bisualki berehalakoa izan daiteke, baina metodo axiomatikoaren arabera, aurrez onartu edo frogatutako proposizioetatik ondorioztatu beharrekoa litzateke, eta Euklidesek ez du hala egiten.

Aurrekoa bezalakoak, Euklidesen postulatuetatik zorroztasunez deduzitzeko aukera dagoen neurrian, akats metodologikotzat har dezakegu, emaitzen zuzentasunean eraginik ez duena. Eta Euklidesen lanari, oso berandura arte egin zaizkion kritikak, zentzu honetan bideratuak izan dira, hau da, metodo axiomatikoa behar besteko zorroztasunez erabili ez izanari lotutakoak. Hilberten garaira arte, erabat zabaldua zegoen, Euklidesen arrazonamenduen oinarriak behar bezala garatuz gero, akatsgabeko teoria axiomatiko bat lortuko litzatekeela. Hau egin nahia dago, berez, Hilberten *Grundlagenen* oinarrian. Hilbertek Euklidesen postulatuak axioma gisa berridatzi zituen eta, hauetatik eta inongo marrazki edo intuizio espazialik erabili gabe Euklidesen teorema guztiak deduzitu zituen. Euklidesen sistema "axiomatikoak" izan zitzakeen akatsak akats, zalantzaezina da, teoria axiomatiko modernoek, 2500 urte lehenagoko Euklidesen lanean ezinbesteko aurrekaria izan zutela, Schwartzek aitortutako balio osoarekin.

Hilbertek geometriarako emandako teoria axiomatikoak, ez du "definiziorik". Definitu gabeko nozioak jarri zituen teoria axiomatikoaren oinarrian, hiru "jatorrizko objektu": puntuak, zuzenak eta planoak, eta hiru "jatorrizko erlazio": "barnean egotea" edo pertenentzia erlazioa (puntu batek zuzen edo plano batekiko gordetzen duena, adibidez), "bitartean egotea" (puntu batek, beste birekiko izan dezakeena, hirurak alineatuta daudenean) eta "kongruentea izatea" (bi zuzenki edo bi angelu[45], adibidez). Jatorrizko nozioak esplizituki definitu ez bazituen ere, axiometan zerrendatutako beste nozioekiko erlazioek, inplizituki definitzen dituztela esan ohi da, eta Hilberti zor zaio[46], matematika modernoan, Euklidesen erako axiomen "berehalako

[45]Nozio deribatuak dira angelu eta zuzenkiak, nola ez, Hilbertek zorroztasun osoz definitu zituenak, jatorrizko nozio eta erlazioak erabilita.

[46]Ikusi Fregerekin izan zuen eztabaida axiomen izaeraren gorabeheran [Shapiro 2005]. Frege

egien" izaera alde batera utzita, axiomen izaera definitzailea gailendu izana. Objektu matematikoak desagertu egiten dira, eta hauen propietate axiomatikoen bidez ordezkatuak dira. Hilberten arabera posible litzateke "puntua", "zuzena", eta "planoa" hitzak, "mahai", "aulki" eta "pitxar" hitzen bidez ordezkatzea, teoremen zuzentasuna kolokan jarri gabe[47]. Era honetan teoria axiomatiko batean teorema zuzenen dedukzioan, intuizio espazialek izan dezaketen papera desagertzea lortzen zuen, bide batez. Neurri batean matematika eta mundu errealaren arteko loturak apurtzea ekarri zuen Hilberten zentzuan ulertutako metodo axiomatikoaren garapenak, 2 kapituluan ikusiko dugun bezala, XX. mendeko matematika berriaren sorreran osagai garrantzitsua bihurtuko zena.

Axiomen arteko independentzia logikoa izan zen Hilbertek sistematikoki landu zuen lehenbiziko puntua sistema axiomatikoei zegokienean. Esparru honetan Hilbertek eginiko ekarpen garrantzitsuenetakoa axioma sistemaren *konsistentzia* modu sistematikoan aztertzeko beharrarena da. Sistema axiomatiko bat aztertzerakoan bere konsistentzia eta bere axiomen independentzia logikoa aztertzea interesatuko zaio Hilberti. Aurrerago sistemaren *osotasuna*, hau da, teorema ezagun oro sistemaren baitan deduzigarria dela ikustea, ere gehituko zaie kontzeptu hauei. Existentzia matematikoa sistema axiomatiko baten baitan ematen zen konsistentziak bermatzen zuen soilik Hilbertentzat.

Matematika esanahirik gabe joku formal hutsa izatearen ikuspegia egotzi izan zaio Hilberti, horretarako arrazoirik gabe. Hilbertek metodo axiomatikoari oso erabilera konkretua ematen baitzion. Ez zen inoiz hutsetik teoria axiomatiko abstraktuak sortzearen aldekoa izan. Lehendik existitzen ziren teoria matematiko nahiz zientifikoak hobeto definitzeko eta ulertzeko tresna bezala ikusten zuen Hilbertek teorien

---

eta Hilberten arteko korrespondentzia [Frege 1976]-an publikatu zen, eta ingelesezko itzulpen bat existitzen da (1980). Ikusi bibliografian.

[47]Hilberti egin izan zaion, matematika zentzugabeko formalismo mekaniko batekin parekatzeko, kritikarekin erlazionatuta dagoena.

axiomatizazioa. Zientziaren garapenak honen zabalkundeaz gain teoriaren estruktura logikoaren argipena ere eskatzen zuen, eta bigarren lan honetarako ezinbesteko tresna zen metodo axiomatikoa, eta beraz, zientzia baten garapenerako ezinbestekoa. Ondo garatutako teoriei baino ezin zitzaien aplikatu ordea, ondoko hitzetan ikusten denez:

> Zientziaren eraikina ez da etxebizitza baten moduan jasotzen, zeinentzat lehenbizi oinarri sendoak ezartzen diren eta hori egin ostean baino ez den bat gelak eraiki eta hauek zabaltzera pasatzen. Zientziak nahiago du ahalik eta arinen espazio erosoak ziurtatzea, hauetan hara eta hona ibiltzeko eta soilik hori egin ostean, han eta hemen oinarri ahulak gelen zabalkundeari eusteko gauza ez direla adierazten duten seinaleak agertzen direnean, egongo da hauek babestu eta gogortzeko prest. Hau ez da ahultasun bat, aitzitik, garapenerako bide zuzen eta osasuntsua baizik.[48]

Aurrerago 2.2.1 atalean ikusiko dugunez, ez soilik zientziari dagokionez, matematikari dagokionean ere oso metafora errekurrentea izango da, matematikaren eraikin erako antolaketarena.

Hilbertekin, beraz, teoria axiomatiko baten ideala aldatu zela esan dezakegu. Gaur egun, zientzia bat axiomatizatzea, lehenbizi oinarrizko nozioen zerrenda osatu eta ondoren hauek betetzen dituzten ondo aukeratutako propietate edo axiomen zerrenda bat ematea litzateke. Axioma hauek ez lukete frogarik beharko onartuak izateko, hauen bidez, modu inplizituan, hauek betetzen dituzten "objektuak" definitzeko helburuarekin ezartzen dira eta.

[48] The building of science is not raised like a dwelling, in which the foundations are first firmly laid and only then one proceeds to construct and to enlarge rooms. Science prefers to secure as soon as possible comfortable spaces to wander around and only subsequently, when signs appear here and there that the loose foundations are not able to sustain the expansion of the rooms, it sets to support and fortify them. This is not a weakness, but rather the right and healthy path of development. [Hilbert 1905] [Ferreiros & Gray 2006, 3. or.]-n aipatua.

[Hilbert 1899]-n ematen direnak, esaterako, axioma "kategorialak" izendatu ohi dira. Axiomatika *itxiak* ere esaten zaie, isomorfismoz gaindi, eredu bakarra definitzen dutelako, hau da, sistema axiomatiko horren eredu guztiak isomorfoak direlako. Alderantziz, "kategorialak" ez diren sistema axiomatikoak axiomatika *irekiak* ere esaten zaie, eredu ez isomorfoak dituztenak dira. Era honetakoa da taldeen teoria (axiomatikoa[49]). Sistema axiomatiko "ez-kategorialek" besteek baino aplikazio gehiago izan ohi dituzte, eredu ez isomorfoak dituzten heinean, orokorragoak direlako. Taldeen teoria axiomatikoa, ez da talde klase batzuei buruzkoa, talde guztien propietate komunei buruzkoa baino. Era honetan talde orokorrei buruzko emaitza guztiak, axiomak betetzen dituen edozein sistemari aplikagarria zaio, berehala. Era honetan, teoria orokorrak garatu eta kasu konkretuetan aplikatzeak, teoria konkretuagoak, bakoitza bere aldetik garatzeak baino askoz "kostu" txikiagoa dauka.

Atal hau ixteko interesgarria izan daiteke matematikaren barne oinarrien gure azterketan paper garrantzitsua jokatuko duen Bourbakik bere lanean metodo axiomatikoari aitortu zion lekuari aipamen bat egitea. Are gehiago, Bourbakiren lanak XX. mendeko bigarren erdiko matematikaren konfigurazioan jokatutako paper nagusia ezagututa. Bourbakik bere proiektuaren berri emanez 1948an argitaratutako *L'architecture des Mathématiques* artikuluan [Bourbaki 1948], esaten du, matematikaren barne garapenak azken urteetan inoiz izan ez duen batasun bat erakusten duela eta batasun horren oinarrian, matematikaren adar desberdinen arteko erlazioak sistematizatu ahal izatea ekarri duen metodo axiomatikoa aurkitzen dela. Bourbakiren arabera, axiomatikaren azken helburua, matematikaren "ulergarritasun sakona" eskaintzea da[50].

Matematikaren barne oinarrietan paper garrantzitsua dagokio, beraz, metodo axio-

[49]Ohiko talde teoriari buruz ari gara, taldeak axiomen bidez definitzen diren heinean, izen hori mereziko bailuke, erabiltzea ohitura izan ez arren.

[50]What the axiomatic method sets as its essential aim, is exactly that which logical formalism by itself can not supply, namely the profound intelligibility of mathematics. [Bourbaki 1948], guk ingelesezko itzulpenetik hartu dugu (1950): 223. or.

matikoari, Bourbakik bere *estrukturetan* oinarritutako *eraikuntza matematikoan* erakutsiko digunez.

1.2.2 Geometria kartesiarra edo geometriaren aljebraizatzea

Geometria analitikoa problema geometrikoak ebazteko, greziarrek ezagutu ez zuten erako, tresna indartsu bat dela esan daiteke. Planoaren geometria analitikoaren oinarria, esaterako, planoko puntuen eta zenbaki errealen bikote ordenatuen arteko korrespondentzia baten ezarketan datza. Koordenatu sistema bat ezartzea lortzen da modu honetan, planoko kurbak eta bi aldagaiko $f(x, y) = 0$ itxurako ekuazioak, modu biuniboko batean erlazionatuta gelditzen direlarik. Batetik, kurba bakoitzari, ezarritako koordenatu sistemaren arabera, errotzat, kurbaren puntuen koordenatuek osatutako zenbaki erreal bikote ordenatuak baino ez dauzkan bi aldagaiko ekuazio bat egokituz. Eta bestetik, alderantziz, bi aldagaiko ekuazio bakoitzak, honen erro bakoitzak osatutako zenbaki erreal bikote ordenatuari, berriz ere, planoan ezarritako koordenatu sistemaren arabera, egokitutako planoko puntuen bilduma egokituz. Planoko puntuak zenbaki bikoteekin eta planoko kurbak ekuazioekin erlazionatzen dituen hiztegi bat bezala ikus daiteke geometria analitikoa. Baina elkarketa harago doa, esaterako, planoko bi kurbaren arteko ebakidura aurkitzearen problema geometrikoa, kurba hauei dagozkien $f(x, y) = 0$ eta $g(x, y) = 0$ ekuazioek osatutako sistema ebazteko problema aljebraikoaren baliokidea bihurtzen baita. Geometrikoa analitikoak, kurben propietate geometrikoen eta hauei dagozkien ekuazioen propietate aljebraikoen arteko erlazioak ere ezartzen ditu. Eta adibidez, geometriako teorema bat frogatzeko eginbeharra, aljebrara oso modu eraginkorrean eraman daiteke, honek eskaintzen duen kalkulurako euskarri egokia dela eta.

Kontuz ibili beharra dago kontestu honetan egiten den "analitiko" hitzaren erabilerarekin, ez baitu matematika modernoan duen esanahirik, eta zentzu horretan interpretatzeak arazoak sor ditzakeelako. Greziarren garaitik 'analisi" hitza erabili izan da ikusi edo frogatu nahi den zerbaitetik, ezaguna (onartua edo frogatua) den proposizioetara iristeko jarraitzen den "atzerako" bidea adierazteko. Alderantziz, "analisiaren" bidez aurkitutakoa aurkezteko modu deduktiboari "sintesia" esaten zaio. Horregatik esan izan ohi da Euklidesen *Elementuak* geometria sintetikoaren erakusleak direla. Geometria analitikoa, azken batean, aljebra erabiliz, egiten den geometriaren "analisi" bat izango litzateke eta hortik bere izena.

Gorago hitz egin dugu Euklidesen *Elementuei* buruz. Teoria matematiko baten aurkezpen sintetiko baten paradigma ezarri zuela esan dugu, aurkezpen genetiko batek lekarkeen aurkikuntza matematikoaren bide heuristikoa izkutatuz[51], eta greziarren kantitate diskretu eta magnitude jarraituen arteko soluzionatu gabeko bereizketari jarraituz, geometriaren garapena bideratu zuena aritmetikatik aparte. Euklidesen bidea, sistematizazioaren ikuspegitik goraipatzekoa izanagatik, landutako kurba geometrikoen zilegitasuna, azalera edo luzeren arteko proportzionaltasun erlazioen bidez definitutako gainazal edo leku geometrikoen ebakiduren bidez eraikigarriak direnetara mugatzen duen heinean, bide berriak urratzea eragozten du. Greziarren "aljebra geometrikoa" deitu izan diote bide honi[52], zenbakiak zuzenkien bidez eta zenbakien arteko eragiketak, terminoen homogeneotasuna bermatzea eskatzen zuten eraikuntzen bidez ordezkatuz: babiloniarren metodo aljebraikoak geometrizatuz, azken finean[53]. Eskola pitagorikoak garatutako *azaleren aplikazioak* deitutakoa da, bide honetatik, garai hartan ekuazioak ebazteko erabili izan zen teknika indartsua.

Euklidesek ezarritako mugez gaindi, ordea, greziarren garaikoak dira baita ere, forma geometrikoak ekuazioen bidez deskribatu eta lantzeko lehenbiziko ahaleginak. Menecmo, Apolonio eta Pappusen lanak dira horren erakusgarri, koordenatu sistema

[51]Ikusi Hilbertek egindako metodo axiomatiko eta genetikoaren bereizketa [Corry 1996]-k Hilberti eskainitako kapituluan.
[52]Ikusi [Dieudonne 1974].
[53]Ikusi [Gonzalez 2004].

deitzen dugunaren baliokide bat erabiltzera iritsi zienak. Ekuazioen bidez definitutako kurba lauen adibideak agertzen zaizkigu. Emandako karratu baten azalera bikoitza duen karratuaren aldea determinatzeko problemari segika, problema bera kuboentzako planteatu zenean Menecmok emandako hiperbola baten eta parabola baten arteko intersekzioaren bidezko soluzioan ere antzeman daitezke horrelako saiakerak. Zentzu honetan esanguratsuak dira bereziki, Apoloniok egindako koniken azterketak. Greziarrek jatorri geometriko hutsa zuten problemei erlazionatuta, kurba aljebraikoak leku geometriko moduan sartu izanaren erakusle dira lan hauek. Koniken normalak aztertzen dituen partean, koniken kurba ebolutak guztiz ezaugarritzen ditu. Gaur egungo notazioa erabilita Apolonioren teoremek ebolutaren ekuaziora garamatzate zuzenean. Baina aljebra sinboliko egokirik ez zuten garai hartan urrats hori eman ahal izateko. Greziar hauek jadanik ezagutzen zuten kurben azterketarako koordenatu sistemen erabilera, aljebra sinbolikoaren konputaziorako, manipulaziorako eta sinplifikaziorako mekanikarekin konbinatzean datza, hain zuzen ere, geometria analitikoa[54].

Fermat eta Descartes jarri ohi dira geometria "kartesiarra" edo "analitikoaren" jatorrian[55]. Biek ere oinarri beretsua izan zuten, batez ere Apollonio eta Pappusen lanetan, baina ez dirudi elkarren lanaren berririk izan zutenik eta modu independentean lan egin zutela dirudi[56]. Horrez gain, ordurako Viѐteren *In Artem Analyticem Isagoge* (1591) lanean, gorago aipatutako aljebra sinbolikoa, hein handi batean garatuta agertzen zaigu. Hau oinarrizko tresna algoritmiko bezala baliatuz, geometriako problemak ebazteko analisiaren potentzialtasun heuristikoak asko irabazi zuen, azterketa analitikoa sintesi aljebraikoarekin konbinatuz. Horrela sortuko da hasieran deskribatu dugun geometria analitikoa. Greziarren aljebra geometriko deitu dugunaren zurruntasunak, kasu konkretuen kasuistika handiak halabehartzen ditu, kasuan

[54]Ikusi honen harira [Coolidge 1940], [Dieudonne 1974], [Gonzalez 2004].

[55]Bereziki, Descartes, "kartesiarra" bere izenaren forma latinizatutik eratortzeak iradokitzen duen bezala.

[56]Ikusi [Coolidge 1940].

kasuko eraikuntza geometriko burutsuekin. Gainera aurkezpen sintetikoak aurkikuntzarako bideak izkutatzeak, ikerketa berriak zailtzen ditu. Bereziki Descartes, greziarrek emaitzak lortzeko zuten metodoa zein zen ulertzen ahalegindu zen, eta bere ondorioa argia izan zen :"... aintzinakoek ez zuten benetako metodo bat...," bestela "ez zuketen horren liburu handirik idatziko [kuestio geometrikoak ebazteko],..."[57]

Horren ondoan, eragiketa aljebraiko sistematikoak sarraraziko dira problema geometrikoen ebazpenean. Metodo berriaren asmo nagusia ez da emaitzak modu sistematiko batean aurkeztearena, problema berriak sistematikoki ebaztearena baino. Euklidesen geometria sintekikoak erakusten zuen arrazonamendu zorrotzen garrantzia, alde batera lagatzen da, arreta, problemak ebazteko moduetara bideratuz. Eta greziarren analisi-sintesi dikotomiak ekarritako asmatzearen eta frogatzearen arteko erabateko bereizketa gaindituko duten metodoak bilatuz. Geometria analitikoak nolabait bi gauzak batera egiteko aukera emango du aljebraren bidetik.

Aljebraren bidezko geometriaren analisiak, metodoak orokortuz, hauek antzeko kuestioetara modu uniforme batez aplikatzeko aukera emango du, teoria sinplifikatuz. Geometria klasikoa argitasun, malgutasun eta eraginkortasun handiagoz jasotzen laguntzen du geometria analitikoak. Emaitzen aurkezpenerako egokia dela erakutsiz.

Ez hori bakarrik, ordea. Kalkulu aljebraikoak heuristika geometriko indartsu bat dakar berarekin. Ikerketarako tresna egokia da. Bai Fermatek eta bai Descartesek, modu argi eta sinplean ebatziko dituzte, hainbat eta hainbat problema klasiko, irekitako problemak itxiz eta itxita zeudenak sistematizazio berriaren arabera, leku egokian kokatuz: leku geometrikoen, maximo eta minimoen, tangenteen eta koadraturen nahiz kurba batekiko zuzen normalak marraztearenak besteak beste. Azken hauek Apolonioren edo Pappusen problema bezala ezagunak ziren eta greziarren garaitik problema ezagunak ziren.

[57] [Gonzalez 2004]-ko 12. kapituluko 2. orrialdean aipatua.

Fermaten eta Descartesen lanak independenteak izan zirela esan dugu. Ikuspuntu desberdinak landu zituzten bi autoreok. Descartesentzat aljebra geometrian aplikatzeko metodoa, ekuazio aljebraikoen erroen eraikuntza geometrikoen problemak ebazteko bitarteko bat zen nagusiki. Fermatek, aldiz, leku geometrikoen azterketara bideratu zuen bere lana. Eraikuntza geometrikoen problemak pisua galdu duten heinean, esan dezakegu, Fermaten ikuspuntuak hobeto bat egiten duela, geometria analitikoaren ikuspuntu moderno batekin. Biek ere aljebra eta geometriaren arteko erlazioak agerian utzi zituzten. Orain arte batez ere, aljebrak problema geometrikoak lantzeko eskainitako ezaugarrietaz hitz egin badugu ere, kontrako zentzuan, kuestio aljebraikoei interpretazio geometriko bat eman ahal izateak izan duen garrantzia ez da ahaztu behar. Enuntziatu aljebraikoak geometrikoki interpretatzeak, hauen esanahiaren pertzepzio intuitiboago bat izatea ekarri du gehienetan, intuizioari jarraituz bide berriak urratzeko aukera zabalduz.

Baina, alderantzizko zentzuan erabilgarria suertatzeak ez digu izkutatu behar, adibide historiko honetatik matematikaren barne oinarritzearen inguruan atera behar dugun ondorio nagusia zein den. Zelai konkretu batean, kasu honetan geometrian, tresneria aljebraikoa aplikatu ahal izateak zelai horren antolaketan eragiten duen berrantolaketarena hain zuzen. Hau iradokitzera dator:

> Noski, batek Geometria Analitikoa zinez Geometria ote den galdetu dezake. Graziarik eta dotoretasunik gabe, Carnotek "Analisiaren hieroglifikoak" deitu zituenen menpeko, ez al da halabeharrezko indar aljebraiko baten aplikazio sinple bat?[58]

Aljebrak geometria mekanizatzeko balio duela erakutsi zuen geometria analitikoaren adibideak. Aljebraren bidez geometriaren parte desberdinak orden egoki baten bai-

[58]Por su puesto, uno puede preguntarse si la Geometría Analítica es realmente Geometría. Carente de gracia y elegancia, dependiente de lo que Carnot llamó "los jeroglíficos del Análisis", no es una mera aplicación de una fuerza algebráica inexorable? [Dunham 1999], [Gonzalez 2004]-n 12. orrian aipatua.

tan kokatu zitezkeela, konplexua zirudien aniztasun bat, abstraktuagoa zen ikuspuntu bateratzaile batetik interpretatuz. Aljebra matematikaren gainontzeko zelaiak baino oinarrizkoagotzat jo zuen Descartesek, berak. Aljebra arrazonamenduaren zientzia unibertsala dela esango du, bere Matematika Unibertsal deitzen zuenaren bidetik. Geometriaren kasuan bereziki, geometriaren problemak zeintzuk diren identifikatu eta forma geometrikoari dagokionean, erlaziorik ez dutela diruditen kuestioak bateratuz. Aljebrak, zentzu honetan, sailkapen eta hierarkiari dagozkion printzipioak ezartzeko balioko luke, eta beraz, kuestio geometrikoak modu sinplean eta osotasunean lantzeko tresna egokia litzateke. Honela, kasu partikularrak bereizteko beharra minimizatzeaz gain, kuestioak modurik orokorrenean formulatzeko atea zabalduz, eta baita, egoera analogoetan aplikatu daitezkeen, estruktura geometriko partikularrekiko independenteak diren ebazpen prozedura orokorrak garatuz ere.

1.2.3 Analisiaren aritmetizatzea

Continuum delakoa da analisiko kontzeptu zentrala. Continuumak jarraitua esan nahi du, etengabea, zulorik edo hutsunerik gabea. Besteak beste, espazioa eta denbora jarraitutzat hartuak izan dira aintzinatetik. Prozesu naturalak, orokorrean, modu jarraian ematen direla defendatu izan dute filosofo askok: gogora dezagun, besteak beste, *Natura non facit saltus* Leibnizen esaera ezaguna. Kontzeptu honek, Matematikaren historian gero eta definizio zehatzagoak jaso izan ditu, eta azken batean, esan daiteke kontzeptu hau hobeto ulertu nahiak gidatu duela bereziki XIX. mendean asko bizkortu zen Matematikaren Barne Oinarrien bilaketa.

XIX. mendean izandako aurrerapenez ohar gaitezen, aipatzekoa da XVIII. mende amaieran oraindik ere bai kontzeptuak eta bai metodo nahiz frogapenak lausoak eta esanahi zehatzegirik gabekoak zirela gehienetan. Funtzioaren kontzeptua ez zegoen argitua; serieak hauen konbergentzia edo dibergentziaz arduratu gabe erabiltzen zituzten; serie trigonometrikoen bidezko funtzioen adierazpenaren Fourierren teoriak nahasmendua areagotzea baino ez zuen lortu; funtzio jarraituak argumentuaren aldaketa infinitesimalek aldaketa infinitesimalak eragiten dizkietenak ziren, infinitesimoaren[59] kontzeptu iheskorra, mugimenduari zein intuizio espazialari buruzko erreferentzietatik askatu ezinik zebiltzalarik [Marin 2006]; eta hauekin batera kalkulurako ezinbestekoak ziren deribatu eta integralaren kontzeptuak ez ziren sekula behar bezala definitu. Analisiaren izaera logikoa, bera, zalantzazkoa zen Abelen 1826ko ondoko aipamen argigarriak erakusten duen moduan:

> [...] zalantzarik gabe batek analisian aurkitzen duen iluntasun izugarria. Hainbesterainokoa da edozein antolaketa eta sistematizazioaren falta, ezen harritzekoa baita hainbeste gizonek berau ikasi ahal izana. Okerrena da, inoiz ez dela zorroztasunez tratatua izan. Oso teorema gutxi daude analisi aurreratuan, logikoki sostengatzeko moduan frogatutakoak. Edonon aurki daiteke konkretutik orokorra ondorioztatzeko bide miserablea eta benetan harrigarritzekoa da jokatzeko modu honek, paradoxa deitu izan diren horietako hain gutxitara eraman izana.[60]

Nahasmendu honetan ordena ezartzen hasteko determinazioa hartu zuen zenbait matematikarik, analisi osoa kontzeptu aritmetikoen gainean berreraikitzeko asmoarekin. Geometria ez-euklidestarraren agerpenarekin bat egiten du analisiaren aritmetizatze saiakeren hastapenak, eta dirudienez bi ahalegin garaikideotan jende desberdina aritu bazen ere[61], ez dirudi kointzidentzia hau kasuala izango zenik. Geometria euklides-

[59] Hain zuzen ere, infinitesimo hauek continuumarekin duten sakoneko lotura aztertzetik bideratuko da XIX. mendean zehar analisiaren zehaztapena ekarriko duen mugimendu kritikoa. Infinitesimoaren kontzeptua iluna izanda ere, ez da ahaztu behar XVII. mendean eman zen kalkuluaren garapenean paper garrantzitsua jokatu zuela eta aipagai dugun mugimendu kritikoak Matematikatik erauzi arren, XX. mendearen azken aldera Analisi Ez Estandarraren bidetik zilegitasun osoz berreskuratua izan dela.

[60] "[...] the tremendous obscurity which one unquestionably finds in analysis. It lacks so completely all plan and system that is peculiar that so many men could have studied it. The worst of it is, it has never been trated stringently. There are very few theorems in advanced analysis which have been demonstrated in a logically tenable manner. Everywhere one finds this miserable way of concluding from the special to the general and it is extremely peculiar that such a procedure has led to so few of the so-called paradoxes", Œuvres, 2. 263–265, [Kline 1972]-n 947. orrian aipatua.

[61] Gauss izan zen salbuespen bakarretarikoa.

tarraren balio fundamentistaren erlatibizazio horrek, ordura arte matematikari askok sostengatutako, analisia geometrian oinarritzeko ahaleginari hauspoa moteldu ziezaiokeela pentsa daiteke, aritmetikaren mesedetan. Aritmetikan eta ez geometrian baizetzan matematika osoaren oinarri solidoak [Kline 1972].

XVIII. mendean zehar, oro har, matematikarientzat funtzio bati buruz hitz egitean, definizio eremu osoan adierazpen analitiko bakarraz emanak zetozenak baino ez ziren kontuan hartzen. Mendea amaitzerako ordea, Fourierren serie trigonometrikoen bidez adieraz zitezkeen funtzioen eztabaida eta beste batzuk tarteko, funtzio kontzeptua eta hauen erabilera zabalduz joan zen.

Hain zuzen ere, Fourier bera izan zen lehenbizikoetakoa, funtzioaren kontzeptua, ordura arte menpeko aldagaiak aldagai askearekiko ustez jarraitu beharreko eta analitikoki adierazgarria behar zuen legetik askatu zuena. Funtzioaren balioak edozelakoak izan zitezkeela aldarrikatu zuen[62], nahiz eta praktikan bere izeneko serieen bidez adierazgarriak ziren funtzioetara mugatu zen. Hala ere, ordura arte nagusiak izan ziren funtzio aljebraikoek eredugarriak izateari uzten hasteko balio izan zuen Fourierrek hartutako bideak. Ordura arte funtzioentzat (aljebraikoentzat) besterik gabe onartzen ziren propietateen inguruko galderak sortu zitzaizkien horrela matematikariei: funtzioen benetako izaerari buruz, jarraitutasunari, diferentziagarritasunari, integragarritasunari etabarri buruz.

Historiak erakusten du, ordea, analisiaren zehaztapen prozesuaren hasieran inork ez zuela zenbaki errealen sistemaren sendotasuna zalantzan jarri. Gerora, XIX. mendearen amaiera aldera, ordura arte egindako lanak erakusten zituen hutsune batzuei erantzuteko beharrak sortuko zuen zenbaki errealen sistema, bera, birpentsatzeko eta aztertzeko beharra, hurrengo orrietan ikusiko dugun bezala. Prozesu historikoak nekez izan baitaitezke linealak, kontzeptuen hierarkiari dagokienean. Hor datza barne

[62]Ikusi [Kline 1972, 949. or.].

oinarrien bilaketaren zailtasunetako bat, prozesu historikoetatik abstraitu behar direla kontzeptuak eta teoriaren batasun eta ulergarritasun terminoetan berrantolatu.

Kalkuluaren oinarrizko kontzeptuak zehaztasun handiagoaz lantzearen bidea urratzen lehenbizikoetarikoa izan zen Bolzano. Bolzanoren ideiek Kalkuluak hartuko zuen norabidea argiro erakutsiko bazuten ere, bere lanek oso zabalpen txikia izan zuten bere garaian, eta inor gutxik ezagutu zituen hasiera batean.

Cauchy izango zen Bolzanoren ordez, orden kronologikoz honi zegokion aitorpena jasoko zuena. Beranduago izan arren, garai beretsuan ideia beretsuak garatu zituen honek ere, eta aurrekoaren kasuan ez bezala Kalkulu berrituaren oinarri berri bezala onartuak izan ziren orokorrean bere lanak.

Cauchyk Parisen lan egin zuen, garai hartako matematikaren hiriburuan, eta horri zor zaio bere lanek aurrekoarenek baino eragin handiagoa izatea komunitate zientifikoan. Bere ekarpen handietako bat, esan bezala, Kalkuluan sarrarazi zituen zehaztasun handiko metodoek osatzen dute. Hiru tratatu handitan biltzen dira lan hauek guztiak: *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823), eta *Leçons sur le calcul différentiel* (1829). Hauen bidez lortu zuen Cauchyk gaur erakusten den Kalkuluaren moldea orduko matematikarien jardunean txertatzea. Eta denboran aurre hartzeaz gain, zenbait kasutan, zorroztasunean ere Bolzanok Cauchyren lana azpian uzten bazuen ere, baziren Cauchyren lanean Bolzanorenean aurkitu ezin zitezkeen ezaugarri batzuk ere. Horietako bat litzateke, esaterako, Cauchyk bere 1821eko lana, funtzioa bera baino oinarrizkoago jotzen zuen aldagaiaren definizio batekin hasi izana: balio desberdinak hartzen dituen kantitatea zen aldagaia Cauchyrentzat.

Funtzioaren nozio modernoa lehenbizi Dirichleten Fourierren Serieei buruzko artikulu batean aurkitu daiteke[63]. Bere hitzetan y aldagaia x-en funtzioa da, x-ek tarte jakin batean hartzen duen balio bakoitzari y-ren balio bakar bat badagokio.

Gaussek (1777-1855) Aljebraren Teorema fundamentalaren[64] frogapena eman zuenean, egin zituen kontsiderazioak geometrikoak zirela eta, Bolzanok ez zuen behin betiko frogapen bezala onartu. Frogapen matematikoetan espazio eta denborazko intuizioak erabiltzearen aurka zegoen, eta hori izango zen berak landuko zuen bidea. Espazio eta denborazko intuizioak arrazonamendu matematikoetatik erauzteko jarraitutasunaren definizio egokia behar zela ohartu zen Bolzano [Boyer 1959].

Kalkulua magnitude geometriko jarraituak zenbaki diskretu bidez landu nahi izatetik sortu zela onartzen bada, esan daiteke Newtonek mugimenduaren jarraitutasunaren intuizioa erabiliz problemak desbideratzea (baina inola ere ez konpontzea) lortu zuela. Leibniz, bere aldetik, jarraitutasunaren postulatuaz[65] baliatu zen aurrera egiteko, arazoa bere horretan utziz.

Bolzano izan zen, bada, funtzio jarraituaren definizioak funtsean limitearen kontzeptuan lur hartzen zuela argi azaldu zuen lehenbizikoa. $f(x)$ funtzio bat jarraitua zen tarte batean Bolzanorentzat, tarte horretako edozein x baliotarako, $f(x+\Delta x) - f(x)$ aurrez finkatutako edozein balio baino txikiagoa egiten bada, behar bezain Δx txikia (positiboa edo negatiboa) hartuz. Hau da, gutxi asko, gerora Cauchyk emango zuen eta gaur egun oraindik indarrean dagoen funtzio jarraituaren definizioa.

Cauchyren kasuan, Bolzanorenean bezala, limitearen kontzeptua aritmetikoa zen, geometrikoa baino gehiago. Cauchyrentzat, aldagai batek hartzen zituen ondoz-ondoko balioak, etengabe, finkatutako balio bati hurbiltzen zaizkionean, beraren-gandik nahi bezain hurbil izateraino, azken hau aurreko guztien limitea deituko zen.

[63] Ikusi [Kline 1972].

[64] Edozein ekuazio aljebraiko arrazionalek erro bat baduela, esaten duen teorema.

[65] Ikusi, adibidez, [Boyer 1959, 5. kap.] Newton eta Leibnizen Kalkuluari buruzko eztabaida.

Aurrerago definizio formalagoa eta zehatzagoa ematea lortuko bada ere, definizio honek intuizio geometriko eta fisikoa bazter uzten ditu jadanik. Urrunago ere joan zen Cauchy, limite kontzeptu hau argitu asmotan, zenbaki irrazional bat, zenbaki horrengandik gero eta hurbilago zeuden zenbaki arrazionalen limitea zela esaterakoan. Emango du zeresanik adibide honek, ikusiko dugunez.

Bolzanok kantitate infinitesimalak eta infinituak baztertu egin zituen erabat. Cauchyk, aldiz, baztertu ez baina limitearen kontzeptua zehaztuta, orden ezberdinetako infinitesimo eta infinituak[66] definitu zituen, limitea erabilita, eta ordura arteko arazo metafisikoak aldenduz.

Funtzio baten jarraitasuna definitzeko moduan da, hainbestean, Cauchy ere. Bolzanorenarengandik hurbil, $f(x)$ funtzio bat tarte batean jarraitua izango zen, x aldagaiaren, Δx aldakuntza infinituki txiki batek , $f(x+\Delta x)-f(x)$ funtzioaren aldakuntza infinituki txiki bat bazekarren, hau da, x a-ra doan heinean $f(x)$-en limitea $f(a)$ bada, tarte horretako edozein a baliorentzat. Definizio honen bidez, Cauchyk ere buelta eman zien aurreko mendeetan Newtonek eta Leibnizek jarraitutasunaren zentzu lauso batean oinarrituta justifikatutakoari, hau da, aldagaien propietateak mantendu egiten zirela limitera pasatzerakoan. Cauchyk erakutsi zuen limitearen definizioari esker ematen zela hau, erlazio aritmetiko zehatz batzuk betetzen zirenean, eta ez beti.

Orokorrean, aipatu ditugun arrazoiak medio, Cauchy hartu izan da Kalkulu Diferentzial Zehatzaren fundatzaile bezala. Hala ere, bere azalpenetan sistematikoki agertzen diren zenbait esamoldek, zehaztapenak eskatzen dituzte, hala nola: "infinituki hurbildu", "nahi bezain txikia", "aldakuntza infinituki txikien azken proportzioak". Intuizio geometriko eta fisikoaren eragina nabarmena da adierazpen hauetan.

[66]Esaterako, $y = f(x)$, n ordenako infinitesimala izango zen x infinitesimalarekiko, $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{y}{x^{n-\varepsilon}}\right)=0$ eta $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{y}{x^{n+\varepsilon}}\right)=\pm\infty$ betetzen baziren, edozein ε konstante positibo txiki batentzat.

Weierstrass izan zen zehaztasunarizegokionez azken hitza esan zuen matematikaria. Analisiari, intuizio geometriko eta fisiko guztietatik aparte zegoen oinarri aritmetiko erabat formala eman zion. Zehaztasun logikoa lortzeko asmotan Kalkulua zenbaki kontzeptutik abiatuta eraiki nahi zuen honek ere, geometriatik erabat bereiziz. Weierstrassen ekarpenen artean koka dezakegu honenbestez, aldagai, limite, funtzio jarraitu eta hauetatik eratorritako gainontzeko kontzeptuen lehenbiziko formulazio estatikoa[67]. Beretzat x aldagai bat, zenbakizko balioen multzo batetan, hauetako edozein designatzeko erabiltzen zen letra bat izango zen. L zenbakia, $x = x_0$ puntuko $f(x)$ funtzioaren limitea izango da, hautazko ε zenbaki txiki bat emanda, δ beste zenbaki bat aurki bazitekeen, x_0-rekiko δ baino distantzia txikiagora zegoen edozein x-entzat, $f(x)$ eta L-ren arteko distantzia ε baino txikiagoa izanik. $f(x)$ jarraitua izango da $x = x_0$ puntuan, $f(x)$ funtzioaren x_0 puntuko limitea $f(x_0)$ denean, eta $f(x)$ funtzio bat tarte baten jarraitua izango da tarteko edozein puntutan jarraitua bada. Weierstrassen aldagai eta limitearen teoria estatikoak infinitesimoa bezalako kontzeptu iheskorrak behin betiko alboratzea ahalbidetu zuen.

Greziarrek aldakortasun edo bariabilitatearen ideia matematikatik baztertu zuten beren garaian, Zenoren paradoxak saihestu ezinak suertatzen zitzaizkielako. Kontzeptu honek berak, Erdi Aroan biziberritu eta itxura geometrikoa hartu ostean, XVII. mendean Kalkuluaren sorrera eragingo zuen. Ia bi mendetako eztabaidaren ostean, Weierstrassen aldagaiaren eta limitearen teoria estatikoarekin amaituko zen eztabaida. Zenoren paradoxak teoria berriaren argitan ez ziren jadanik gaindiezinak suertatuko. Eta beste behin, eztabaidak pizteko eta teoria egokiagoak aurkitzeko motibazio gisa hain emankorra suertatutako kontzeptua, aldakortasun edo bariabilitatea, matematikatik kanporatua izango da, landutako teoria baterako desegokia delako.

Deribatu kontzeptuaren lehenbiziko formulazio esplizitua ere Bolzanok eman zuen

[67]Mugimenduaren eta espazioaren intuiziotik independentea.

1817an, Kalkuluaren oinarrizko ideiak diferentzia finituen proportzioen limite moduan azal zitezkeela ohartuta. $f'(x)$, $f(x)$-en deribatua, Δx zerorantz hurbiltzen den heinean (goitik nahiz behetik) $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ proportzioak hurbiltzen duen balio bezala definitu zuen. Kasu honetan ere pixka bat beranduagokoa da, 1823koa, Cauchyk *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* lanean emandako definizioa: $y = f(x)$ funtzioa eta x aldagaiaren Δx aldakuntza hartuta, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ proportzioaren limiteari, Δx zerora doanean, y-ren x-ekiko deribatua deitu zion eta $f'(x)$ bezala denotatu zuen, existitzen zenean. Hau izango zen Kalkulu Diferentzialaren oinarrizko kontzeptua Cauchyren teorian. Gero, deribatua limitearen funtzioan definitu ostean, eta aurrez infinitesimoarekin egin zuen era analogoan, funtzio baten diferentziala zer zen definitu zuen. Hain zuzen ere, dx edozein kantitate finitu bezala defintiyu zuen eta dy aurrekoaren funtzioan $dy = f'(x)\,dx$ bezala, hau da, dx eta dy bi kantitate definitzen ditu, beraien arteko ratioa definizioz $f'(x)$ dutenak. Era honetan eragiketak egiteko orduan Leibnizen $\frac{dy}{dx}$ notazioak eskaintzen zituen abantailei eutsi zien Cauchyk, baina, beti ere, hark zituen interpretazio arazoak deribatuaren kontzeptu nagusia erabiliz gaindituta.

Bolzanok argitu zuen beste puntu garrantzitsu bat funtzio jarraituen eta deribagarrien arteko erlazioa izan zen. Ordura arte, eta beti ere jarraitutasunaren intuizio fisiko batek gidatuta, funtzio baten jarraitutasuna baldintza nahikotzat hartzen baitzen funtzio horrek deribatua izateko. Bolzanok kontrako adibide bat eman zuen, uste hau okerra zela erakusteko nahikoa zena: jarraitua izanik deribagarria ez zen funtzio bat eraiki zuen 1834an, amaitu gabeko eta argitaratu gabeko artikulu batean[68]. Riemannek 1854an Göttingenen emandako sarrerako hitzaldia 1867an Dedekindek argiratu zuen arte [Riemann 1867] ez zen, bada, jarraitutasuna eta deribagarritasuna desberdintzeko balioko zuen adibiderik ezagutu. Ondokoa zen Riemannek emandako funtzio patologikoa. Izan bedi $[x]$, x balio erreal bat eta hurbileneko zenbaki osoaren arteko diferentzia, $[x] = 0$ izanik x bi zenbaki osoren arteko erdibidean dagoen kasuan.

[68]Ikusi [Kline 1972] 955. orrian datorren aipamena.

Beraz $-1/2 < [x] < 1/2$ izango dugu. Defini dezagun $f(x) = \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{4} + \frac{[3x]}{9} + \ldots$. Serie hau konbergentea da x-en balio guztietarako. Hala ere, p $2n$-rekiko lehena den $x = p/2n$ puntuetan ez-jarraitua da eta $\pi^2/8n^2$ tamainako jauzia du. x-en gainontzeko balioetarako, $f(x)$ jarraitua da. Hala ere, gai honen inguruan ere Weierstrassena izan zen azken hitza,berak eraikitakoa izan baitzen zabalkunde handiena lortu zuen kontraadibidea aurrerago ikusiko dugun moduan.

Historikoki garrantzia handia izan zuen funtzioen jarraitutasunak, hauen diferentziagarritasunik inplikatzen ez duela aurkitzeak eta funtzioek era guztietako jokaera irregularrak izan zitzaketela ikusteak. Intuizioa eta pentsaera geomerikoarenganako mesfidantza sakontzeko ezinbesteko urratsa izan zen.

Kalkuluaren sorrerako urteetan diferentzial eta deribatuaren kontzeptuen inguruko eztabaida, integralarenaren gainetik egon zen. Greziarren garaitik azalera hurbilduak kalkulatzeko, azpiazaleren batuketetan oinarritutako metodoak ezagutzen ziren. Baina limitearen ikuspegi berritzaileak bultzada garrantzitsua eman zion azaleren kalkuluari ere. Azpiazaleren batuketetan oinarritutako metodo horiek limitearen ikuspuntutik interpretatuta, integral mugatu deitutakoari bide eman baitzioten.

Barrow, Newton eta Leibniz, besteak beste, konturatuta zeuden ordurako, azalerak kalkulatzearen problema, kurben zuzen ukitzaileak kalkulatzearen alderantzizko problema baino ez zela. Deribatuak kalkulatzeko algoritmoak eskura izan zirenean, hauek buelta emanaz, integral mugatuen kalkulua sistematizatzeko bidea aurkitu zen: integral mugagabea deitu izan dena, hain zuzen ere. Integrala ulertzeko bi modu zeuden, beraz: batuketa bezala, integral mugatua, eta diferentziazioaren alderantzizko bezala, integral mugagabea. Kalkulu diferentzialaren sorrera urteetan, integrala ulertzeko bigarren modua zen nagusi, diferentzialaren alderantzizkoa dela esaten duena. Hori dela eta integrala diferentzialaren gainean oinarritu ohi zuten eta hau zen eztabaida nagusia diferentzial eta deribatuaren inguruan zntratzearen arrazoia.

XIX. mendearen hasieran, ordea, egoera aldatu egingo zen, Cauchyk integrala (mugatua) batuketa baten limite moduan birdefinitu zuenean. Pausu honi esker, deribatuaren pareko estatusa onartu zitzaion integralari. $y = f(x)$ funtzio bat, a-tik b-rako tartean jarraitua izanik, ondoko batura definitzen bada: $S_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})$, $|x_{i+1} - x_i|$ gero eta txikiagoa izanik, S_n-ren balioak limite bat iritsiko du, f funtzioa eta a eta b balioen menpean baino egongo ez dena. Limite hau zen, Cauchyk f-ren $[a, b]$ tarteko integral mugatu deitu zuena. Ondoren Analisiaren Teorema Fundamentala frogatu zuen. Teorema honek, integrazioa eta deribazioa modu independentean definitutako eragiketak izan arren, bata bestearen alderantzizko eragiketa bezala uler daitekeela baieztatzen zuen. Hizkuntza matematikoan esanda, $f(x)$ $[a, b]$ tartean jarraitua izanik eta edozein $x \in [a, b]$ hartuta, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ bada, orduan $F'(x) = f(x)$ ematen da. Funtzio ez jarraituetarako hedapenak ere onartzen zituen teorema honek.

Cauchyk garatutako limitearen teoriak, serie infinituen teorian ere berebiziko garrantzia izan zuen. Cauchyren integral mugatuaren definizioan agertzen ziren bezalako serie infinituak, urte asko lehenagotik erabiliak ziren matematikan, baina XIX. mende hasiera aldera arte ez zen hauen konbergentziaz arduratu beharrik ikusi. Cauchy eta bere garaikideak ohartu ziren serie infinituentzat konbergentziaren definizioa eta erizpideak beharrezkoak zirela, kalkuluetan inongo arazorik gabe erabili ahal izateko. Horrela bada, serie infinitu bat konbergentetzat definitu zuen, n handitzen zen heinean $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ batura S limite batera indefinituki hurbiltzen bazen, eta kasu horretan S bera izango zen seriearen batura.

Diferentziazioa, integrazioa edo jarraitutasunaren kasuan bezala, serie infinituen konbergentziaren arazoan ere limitearen nozioa agertzen zen[69]. Honekin lotuta eman

[69]Zenok aintzinatean proposatutako Akiles eta dortokaren paradoxa, adibidez, limitearen kontzeptuan oinarritutako ideia hauetan berrinterpretatuta askatu ahal izango da.

zuen Cauchyk segiden konbergentziarako Cauchyren irizpidea deitu izan dena, segida konbergenteak ezaugarrituz: segida bat konbergentea izango da behar beste n handia hartuz, p eta q, n baino handiagoak diren edozein bi baliotarako S_p eta S_q nahi bezain hurbil daudenean. Baldintza honen beharrezkotasuna konbergentziaren definiziotik berehala eratortzen bazen ere, ez zen gauza bera gertatzen baldintzaren nahikotasunarekin.

Bigarren parte honek zenbaki errealen sistemaren definizio bat eskatzen zuen, zenbaki irrazionalena azken batean, eta horrelakorik ezean frogapena hankamotz gelditzen zen. Arazo hau gainditzeko Cauchyren proposamena, zenbaki irrazionalak arrazionalen segiden limite bezala definitzea izan zen. Segida baten limitea, segidan aurrera eginez, berau eta segidako gaien arteko diferentzia edozein zenbaki baino txikiagoa egitea posible egiten zuena zela kontutan hartzen badugu, Cauchyren definizioak zirkularitate arazo bat zuela ohar gaitezke: definitu nahi den zenbaki irrazionalaren, beraren, aurretiko existentzia, eta beraz definizioa, beharrezkoa da zenbaki irrazionala Cauchyk egin bezala definitzeko.

Analisiaren oinarrien bilaketan arazo serio bat suposatzen zuen zenbaki irrazionalen definizio zirkular honek. Analisia oinarritzeko erabili nahi zen funtsezko definizioak ezin zuen arazo logikorik planteatu. Hori zela eta, limitearen definizioan oinarrituko ez ziren zenbaki irrazionalen definizioak ematen saiatu ziren XIX. mendeko bigarren erdiko zenbait matematikari, Analisiaren aritmetizatze prozesua bururaino eraman nahian. Weierstrass izan zen matematikari horien artean garrantzitsuenetakoa.

Cauchy hartu izan da, orokorrean, kalkulu diferentzial zehatzaren fundatzaile bezala. Hala ere, bere azalpenetan sistematikoki agertzen diren zenbait esamoldek, zehaztapenak eskatzen dituzte, hala nola: “infinituki hurbildu”, “nahi bezain txikia”, “aldakuntza infinituki txikien azken proportzioak”. Intuizio geometriko eta fisikoaren eragina nabarmena da adierazpen hauetan. Weierstrass izan zen zehaztasunari zegokionez azken hitza esan zuen matematikaria; analisiari, intuizio geometriko eta fisiko guztietatik aparte zegoen oinarri aritmetiko erabat formala eman zion. Lehen ere esan dugu aurrez Bolzanok egin zuen bezala, Weierstrassek ere eraiki zuela tarte batean jarraitua izanik, tarte horretako puntu batean ere deribagarria ez zen funtzioa, funtzio jarraituek deribagarritasuna bere baitan zeramaten ideia oraindik orokortua oinarri gabe utziko zuena. Fourierrek ekarritako serie trigonometrikoak erabiliz eman zuen honako kontradibidea:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x)$$

non $x \in \mathbb{R}$, a zenbaki oso bakoitia, $0 < b < 1$, eta $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ diren.

Limite kontzeptua gehiago argitu asmotan Cauchy, zenbaki irrazionalaren definizio bat ematera ere ausartu zen, zenbaki irrazional bat, zenbaki horrengandik gero eta hurbilago zeuden zenbaki arrazionalen limitea bezala definituz. Akats garrantzitsu bat zeukan, ordea, definizio honek, zenbaki irrazionala limite bat bezala definitzen baitzuen, baina limiteak berak esanahirik izatekotan zenbaki irrazionalak aurrez hor egotea eskatzen baitzuen. Laister baztertu zuen definizio hau Cauchyk. Limitearen ideiarekiko independentea zen zenbaki irrazionalaren definizio bat emanaz konpontzen saiatu zen Weierstrasse beranduago: zenbaki irrazionalaren definiziotzat segidaren limitea hartu beharrean, segida bera hartzea.

Continuum edo jarraitutasunaren ideiek oraindik ere lausoak izaten segitzen zuten eta beharrezkoa izango zen kontzeptu hauek ere, aipatu berri dugun aldakortasunarenak bezala, beren formalizazio prozesua izan zezaten matematikaren barne oinarriak era formal batean finkatuta gelditzeko. Dedekind eta Cantor izan ziren Weierstrassek urratutako bideari jarraituz, Heinek, Merayek eta Russell berak egindako ekarpen apalagoak ahaztu gabe, kuestio hauek sakonki aztertu eta emaitzarik garrantzitsuenak eman zituzten matematikariak. Biek ere Weierstrassek zenbaki irrazionalak definitzeko egindako ahaleginari jarraipena eman zioten eta bakoitzak bere bidetik, Analisiaren aritmetizatzea bururaino eraman zuten.

Limiteen eta zenbaki irrazionalen gaineko Cauchyren arrazonamendu zirkularrak ekidin asmotan antzeko bideak hartu zituzten, besteak beste, Cantorrek eta Heinek. Segida infinitu baten limitea izango zen, S zenbaki baten existentzia postulatu beharrean, segida konbergente hori bera[70], hartu zuten S-ren definiziotzat.

Agian interesgarriagoa da, garai beretsuan Dedekindek egindako arazoaren azterketa eta emandako soluzioa zein zen ikustea. Funtsean bi definizioak baliokideak direla ikus badaiteke ere, Cauchyren arazoa gainditzeko zenbaki irrazionalak definitzeko moduan zentratu beharrean, jarraitutasunaren definizio matematiko bat ematen ahalegindu zen Dedekind, magnitude geometriko jarraituen eta diskretuaren arteko funtsezko desberdintasuna non zegoen galdetuz. Puntu batek zuzen bat ebakitzen duen moduan pentsatuz askatu zuen korapiloa. Zuzen bateko puntuak bi klasetan sailkatzen badira, bietako bateko edozein puntu besteko edozein punturen ezkerraldean egonik, beti ere, zatiketa hori ematen duen puntu bat eta bakarra dagoela konturatu zen. Hau ez da hala gertatzen zenbaki arrazionalen multzoan. Horrela bada, eta zuzen bateko puntuak zenbaki errealekin bijekzioan jar daitezkeen Cantor-Dedekinden axioma erabilita, esan daiteke, zenbaki arrazionalen multzoa, bi klasetan banatzen den orotan, lehenbiziko klaseko edozein zenbaki bigarrengoko edozein baino txikiagoa izanik, zatiketa hori (Dedekinden ebakidura) ematen duen zenbaki erreal bat eta bakarra dagoela. $\sqrt{2}$ denotatzen duguna izango litzateke, adibidez, propietate honen arabera karratua bi baino txikiagoa eta handiagoa duten zenbaki arrazionalen zatiketa edo Dedekinden ebakidura emango ligukeen zenbaki erreala [Dedekind 1872].

[70]Zehatzak izateko, Cauchyren baldintza betetzen duten zenbaki arrazionalen segiden artean definitutako baliokidetasun erlazio bat erabiltzen da, lortutako baliokidetasun klaseen bidez zenbaki errealak definitzeko

Dedekinden postulatuaren bidez zenbaki arrazionalen multzoa osatuz, zuzenek duten jarraitutasun propietate bera izango zuten zenbaki errealek, espazio eta denbora intuizioak alde batera utzita, eta posible zen zehaztasun osoz limiteen inguruko teoremak frogatu eta hauetatik eratorritako Kalkulua eraikitzea.

Aipatu beharrekoa da, definizio hauen ostean (bereziki Dedekindena eta gero), zenbaki kontzeptuan, ezaugarri nagusia magnitudea zela pentsatzetik, benetan inporta zuena ordena zela ohartzera pasa zela. Limite kontzeptua bera ere, kontzeptu ordinal bat bezala definitua zegoen, eta Kalkuluaren oinarrizko bi definizioak hauek izanik, hauetatik, jadanik hutsune logikorik gabe, eraikitzen zen teoria ere, ordura arte uste zen bezala kantitatearen zientziaren adar bat baino gehiago, erlazioen logikaren adar bat izango zen.

Hasieran esan dugun bezala, Dedekinden ekarpenak, limitearen definizioarekiko independentea zen zenbaki errealaren definizioa emateaz gain, magnitude jarraituaren izaeraren inguruko azalpen formal bat ere eskaintzen zuen. Ordura arte aldagai independente jarraitu bat, balioak zuzenki bati zegozkion tarte batean har zitzakeena zen. Dedekindek modu formal batean azaldu zuen aldagai edo multzo jarraituen izaera, honako hiru baldintzekin ezaugarrituz: multzo bat jarraitua izateko, multzo ordenatua, dentsoa eta perfektua[71] izan behar zen. Horra, bada, jarraitutasunaren formalizazio matematikoa.

Jarraitasunaren teoria matematikoa, beraz, logikoki garatutako zenbakien eta multzoen teorian oinarritzen zen. Azken kontzeptu hau formalizatzeak, bere aldetik, bilduma infinitu bat zer zen argitzea eskatzen zuen [Grattan-Guiness 1980]. Cantorrek osatu zuen lehenbizikoz infinituaren teoria formal bat, bere azpimultzo ez propio batekin bijekzioan jar daitezkeen multzoak multzo infinitu definituz. Cantorren teo-

[71]Multzo *ordenatua* izateak, multzoko elementuen artean orden erlazio bat izatea eskatzen du; multzo *dentsoa* izateak, bi elementuren artean beti hirugarren bat aurkitu ahal izatea eskatzen du; eta azkenik, multzo *perfektua* izateak, Dedekinden jarraitutasunaren postulatua betetzea.

ria beharrezkoa izan zen Kalkuluan egiten zen infinituaren erabilerari oinarri logiko tinko bat eman ziolako. Noski, infinituaren formalizazio matematiko bat zen heinean, ez zuen infinituaren kontzeptuak berez dakartzan zailtasun kontzeptualak gainditzeko balio, baina zenbaki irrazionalak eraikitzerakoan edo limite kontzeptuaren baitan infinituari egindako erreferentziak erabat justifikatuak zeuden Cantorren lanarekin. Multzo teoria modernoaren oinarriak ere ezarri zituen bide batez.

Dedekind eta Cantorren lanarekin Analisian zenbakiak eta hauen multzo finitu nahiz infinituak baino ez daudela frogatuta geratu zen. Burutua zegoen, bada, aritmetizatze prozesua, Matematikak ordura arte ezagutzen ez zuen zehaztasun formala tarteko.

1.2.4 Multzoen teoriaren sorrera

Gaur egunean multzoen teoria zerbait baldin bada, berezko nozio propioak, emaitza garrantzitsuak eta erantzun gabeko galdera sakonak dituen teoria matematiko bat da. Beste teoria batzuetan aplikazio esanguratsuak dituena, gainera. Logika matematikoari gertatzen zaion bezala (askotan, gaur egun ere, multzo teoria logika matematikoaren azpiatal bat bezala aurkeztu izan ohi da), matematikaren oinarrien inguruko kuestioei lotuta izan zuen sorrera, eta horrek estatus berezi bat ematen dio matematikaren oinarrietan. Nahiz eta, berriz diogun, harrez gero bere bidea egin duen teoria bat izan. Guri hemen interesatuko zaiguna, matematikaren oinarrietan, eta bereziki barne oinarrietan, izan duen papera aztertzea izango da.

Multzo teoria *axiomatikoa* izan ohi da, bereziki, matematikaren oinarriekin lotu izan dena. Kapitulu honen sarreran aipatu ditugu Kunen eta Maddyren ikuspuntuak, zentzu desberdinetan izanik ere, multzo teoria axiomatikoa matematikaren oinarri bezala onartzen dutenak. Lehenbizikoaren eta jarduneko matematikari askoren arabera, objektu matematikoak multzoak baino ez dira, azken finean, eta hauen propietateak multzoen inguruko axioma bakanetatik deduzitu daitezke. Bigarrenaren arabera, objektu matematikoen izaerak (multzoak diren edo ez erabakitzeak) ez dauka inongo errelebantziarik matematikarako, eta nahikoa da multzoak edozein objektu matematiko "ordezkatzeko" gai direla jakitea, hauek matematikaren oinarritzat jotzeko. Garbi dagoena da, gaur egungo ohiko praktika matematikoaren zorroztasun estandarrak finkatzen dituela multzo teoriak. Hau da, nozio edo arrazonamendu bat zehaztasunez adieraztearen sinonimoa dela, hau multzo teorian adierazgarria izatea. Nolabait esateko matematikaren hizkuntza da multzo teoria[72].

Egia esan, ezaugarriren bat komunean duten objektuen "multzo" edo "bildumaren" ideia, hizkuntza bera bezain zaharra (edo zaharragoa) da, eta gizakion pentsamendu kontzeptularekin erlazionatuta dagoena. Euklidesek *Elementuetako* "nozio komunen" artean aipatzen duen "osotasuna partea baino handiagoa" izatearenak argi erakusten du, matematika greziarraren hasieran, jadanik, agertzen direla multzoaren nozioari lotutako ideiak. Harrez gero garai guztietako matematikariek eduki izan dute aztertzen ari ziren objektuek osatutako bildumen kontzientzia, historikoki garatu izan diren kontzeptu desberdinek erakusten duten bezala: propietate jakin bat betetzen duten planuko puntuen "leku geometrikoak", zenbaki edo forma koadrikoen "klaseak" Euler eta Gaussen kasuan, Cauchy eta Galoisen permutazioen "azpitaldeak", Riemannen "Mannigfaltigkeiten"-ak, Cayleyren sinboloen "multzoak" etab. Azkenik Cantorren "Menge" hitza eta kontzeptua gailenduko dira.

Aurreko puntuan analisiaren aritmetizatzeaz hitz egin dugu: analisian intuizio fisiko-geometrikoetan oinarritutako definizio eta arrazonamenduak baztertu eta zenbaki erreal eta zenbaki arrunten bateraketa kontzeptuala bideratu zuen prozesuaz.

[72]Hirugarren kapituluan hitz egingo dugu, gaur egingo praktika matematikora, multzo teoria baino kategorien teoria hobeto egokitzen dela defendatzen dutenen ikuspuntuaz. Multzo teoria baino, kategorien teoria hobetsiko dute hauek, bakoitzak bere berezitasunekin, matematikaren oinarri moduan.

Honen amaieran atera zitekeen ondorioa zen, analisi erreala, azken batean, zenbaki arrazionalen, eta ondorioz zenbaki arrunten gainean zorroztasun osoz eraiki zitekeela. Dedekindek bideratutako analisiaren aritmetikarako erredukzioan, baina, zenbaki arrazionalaren kontzeptuaz gain, multzo infinituaren kontzeptua ere inplikatuta zegoen *Dedekinden ebakidura* deitutakoen bitartez [73]. Dedekindek hasiera batean "logikotzat", hau da, pentsamenduaren legeei zegokiena bezala hartutako kontzeptua bazen ere, gerora, Cantorren multzo infinituen teoriarekin eta Russellen paradoxarekin argi geratuko zen kontzeptu honek plantetatzen zituen arazoak norainokoak ziren. Hori dela eta esan izan ohi da, Dedekindek zenbaki errealak intuizio geometrikoetatik askatzeko, multzo infinituen intuizio ez fidagarriagoan oinarritu zituela [Gillies 1982].

Edozein modutan Dedekindek analisia aritmetikan oinarritu ostean, aritmetikaren oinarriak jartzeko lanari ekin zion, analisi matematikoaren zehaztapenean azken urrats moduan. Arras motibazio desberdinekin bada ere, bat egin zuten Dedekindek eta Fregek aritmetikaren oinarrien bilaketan[74]. Biek ala biek, ez zuten asko usteko, lanari ekin ziotenean, beren lanek matematikaren oinarriak ezartzeko baino, hauen krisia sortuko zuten paradoxa logikoei bidea irekiko zietenik.

Dedekind eta Cantorren hariei jarraitu behar diegu guk hemen, multzoen teoriaren sorreran izan zuten garrantzia dela eta. Dedekinden *Was sind und was sollen die Zahlen?* [Dedekind 1888] lan garrantzitsuaren lehenbiziko partean, gaur egun matematikan zehaztasunez eta modu laburrean hitz egiteko ezinbestekoa dugun multzo teoria *naïvea*-ren formulazio bat aurki daiteke[75]. Hizkuntza berri honek ideiak anbiguotasunik gabe espresatzeko modua ematen zuen.

Dedekindek ez zuen multzoen teoria axiomatikoki definitu, nahiz eta Euklidesek

[73]Ikusi 1.2.3 atala.

[74]1.1.2 atalean landu dugu aritmetikaren oinarrien inguruko Fregeren programa logizista.

[75]Cantorrek eta Dedekindek garai beretsuetan garatu zituzten beren multzoen teoriak. Kuestio hauen ingurukoak [Ferreiros 1999]-n irakur daitezke luze eta zabal.

Elementuetan puntua eta zuzenarekin egin bezala, multzo eta honen elementu izatearen kontzeptuak definitu gabe utzi zituen. Multzo batetako elementu baten eta multzo horren arteko pertenentzia erlazioa hartu zituen multzo teoriako oinarrizko erlaziotzat, gaur $x \in M$ denotatzen dena. Multzo baten *parte* edo *azpimultzo* kontzeptua izan zen pertenentzia erlazioa erabiliz definitutako lehenbiziko nozioa: N multzoa M multzoaren parte edo azpimultzo izateko N-ko elementu oro M-koa ere izateko baldintza ezarriz; gaur $N \subset M$ denotatuko genuke. Dedekindek $M \subset N$ eta $N \subset M$ betetzeak $M = N$ dakarrela, edo multzo bat bere elementuek erabat determinatzen dutela onartuko du. Multzoen arteko bildura eta ebakidura definitzeaz gain, multzo baten parteen multzoa zer den ere erakutsiko du Dedekindek.

Multzoekin batera Dedekindentzat matematikan oinarrizkoa zen beste kontzeptu "logiko" bat zegoen: funtzioaren kontzeptua. Analisiaren aritmetizatzeaz jardun dugunean, ikusi dugu zenbaterainoko errelebantzia izan zuen analisian, funtzioaren edo aplikazioaren kontzeptuak izandako eboluzioak. Dedekind izan zen eboluzio horren azken forma abstraktua lehen aldiz eman zuena. M eta N edozein bi multzo izanda, M-tik N-rako f *aplikazio* bat, M-ko x elementu bakoitzari, $f(x)$ denotatutako N-ko ondo detrminatutako elementu bakarra egokituko zion lege edo erregela bat izango zen aurrerantzean. Ordura arteko aldagai errealeko funtzio erreal guztiak, Dirichleten orokorpenak barne, Cauchyren permutazioak eta klase guztietako transformazio geometrikoak orokortu zituen honela Dedekindek. Cantorren lanetan ere aurki daitezke nozio hauetako batzuk. Multzoen *biderkadura kartesiarrarena* esaterako ez da aurkitzen Dedekinden lanean eta bai aldiz Cantorrenean: M eta N bi multzo emanda, hauen elementuek osatutako (x, y) bikote ordenatuen $M \times N$ multzoa, planoko puntuen koordenatu kartesiarren orokorpen bat baino ez dena. Edo multzo gehiagoren arteko biderkadura kartesiarra.

Multzo teoriazko hizkuntza abstraktu honek berebiziko garrantzia izango du matematikaren barne oinarrien garapenean. Van der Waerden edo Bourbakiren esposizioak hartuko ditugu hurrengo kapituluan eta hauetan garatzen diren *estrukturalismoen* ezinbesteko osagaia izango da multzo teoriazko hizkuntza, metodo axiomatikoarekin batera teoriak zorroztasun osoz garatzeko aukera eskaintzen baitute. Objektu abstraktuen arteko erlazioen azterketarako markorik egokiena eskainiko dute. *Estruktura matematikoak* elementuen arteko erlazioen bidez estrukturatutako multzoak izango dira.

Bada ordea, multzoen teoriaren sorreran, multzoak matematikarien hizkuntza zorrotz bilakatzetik harago, hasieran aipatutako multzoen teoriak hartutako bide independentearen jatorrian koka dezakegun nozio bat. Historikoki matematikariek kontu handiz tratatu izan duten, multzoekin erlazionatutako puntu garrantzitsu hori da infinituarena. Matematikari greziarrek, esaterako, inoiz ez zituzten zenbaki arrunten multzoak aipatu. Infinituaren ideiak, nozio negatibo bat jasotzen du, finitua ez izatearena, eta Dedekind eta Cantorren garaira arte[76] ez zen lortu ideia honen formulazio zehatz bat ematerik[77], matematikarien artekoak baino, filosofoen artekoak gehiago izan direlarik historian infinituaren inguruko eztabaidak.

Dedekind eta Cantorrenak dira multzo infinituen lehenbiziko azterketa sistematikoak, garai beretsukoak biak ere. Dedekindek eman zuen multzo infinituaren lehenbiziko definizioa [Dedekind 1888][78], eta honen etimologiaren aurka, modu positiboan definitu zuen, definizio negatiboa, hasiera batean jatorrizkoa zirudien multzo finituarentzat utziz: M multzo bat *infinitua* izango da bere azpimultzo propio batekin bijekzioan jarri badaiteke, eta *finitua*, infinitua ez baldin bada. Multzo infinitua definitu ostean, eta zenbaki arrunten multzoaren existentzia suposatu gabe, Dedekindek M edozein multzo infinituk, gaur multzo *induktibo* dituko genukeen multzo bat[79]

[76]Bolzano izan omen zen multzo infinituak libreki erabili zituen lehenbizikoa, baina beste ekarpen batzuekin bezala, hau ere ez beranduagora arte ezagutu. Ikusi [Grattan-Guiness 1980].

[77]Hasierako kontzepzioaren aurka, modu positiboan eman ere.

[78]Argitalpena 1888koa izan arren 1872koak dira lan hauek. Ikusi [Dieudonne 1987]

[79]A multzo bat *induktiboa* dela esaten da, *lehenbiziko* $1 \in A$ elementu bat eta A-ko elementuak A-n aplikatzen dituen *s hurrengo* aplikazio bat existitzen badira *Peanoren axiomak* betetzen dituztenak. Ez da ahaztu behar, axioma hauek, propietate moduan bada ere, Dedekindek enuntziatu

partetzat izango lukeela erakutsi zuen. Multzo induktibo guzti hauen ebakidura bezala, hau da, multzo induktiborik txikiena bezala definituko du Dedekindek zenbaki arrunten multzoa. Ondoren multzo teoria hutsezko arrazonamenduen bidez zenbaki arrunten propietateak frogatuko ditu.

Multzo teoria intuitibotik harago Cantorren benetako ekarpena multzo infinituen esparruan ematen da [Cantor 1895-1897]. Ordura arte multzo finituak eta infinituak bereizten ziren, azken hauen artean bereizketarik egitera sartu gabe. Multzo infinituen artean "tamainari" dagikionean desberdintasunak daudela erakutsi zuen lehenbiziko aldiz Cantorrek. Multzoen konparaketan bijekzioek jokatzen zuten paperaren garrantziaz ohartu zen Cantor, horrela bijekzioan jar daitezkeen multzo finituak tamainari dagokionean baliokideak diren ideia, multzo infinituetara zabaldu zuen, multzoen arteko *ekipotentzia* erlazioa definituta. Multzo infinituen artean, zenbaki arrunten $\mathbb{N}$ multzoarekin ekipotenteak zirenei *zenbagarri* deitu zien, analisian, multzo bateko elementu desberdinez osatutako segidek jokatzen zuten paper garrantzitsuaz ohartuta, segida hauek azken finean zenbaki arrunten multzotik segidako elementuen multzorako bijekzio moduan ikus bait zitezkeen. Berehala konturatu zen gainera zenbaki osoen $\mathbb{Z}$ multzoa ez ezik zenbaki, zenbaki arrazionalen $\mathbb{Q}$ multzoa ere zenbagarria zela. Azken emaitza honek gure intuizioa zalantzan jartzen zuen, jakina baitzen edozein bi zenbaki arrazionalen artean, infinitu zenbaki arrazional desberdin zeudela, eta beraz gutxienez $\mathbb{N}$ multzoan adina. Cantorren emaitzaren ondoren ordea, ez soilik gutxienez, gehienez ere, beste horrenbeste ¡eudela ikusi zen. Eta $\mathbb{Q}$ multzo osoa, beraz, edozein bi zenbaki arrazionalen arteko zenbaki arrazionalen multzoaren ekipotentea zela.

Inork inoiz susmatu ere egin ez zuen galdera jarri zion Cantorrek bere buruari: intuizioaren aurka arrazionalen multzoa zenbagarria bada, beste horrenbeste esan al dezakegu errealen multzoari buruz? Ezezkoa izan zen aurkitu zuen erantzuna. Arra-

zituela lehenbiziko aldiz [Dedekind 1888] artikuluan.

kasta honek bultzatuta, multzo finituen kardinalitate ereduak multzo infinituetara zabaltzen ahalegindu zen. Multzo ekipotenteek *kardinal bera* zutela ezarrita, multzoen kardinalen artean orden erlazio bat eman nahi izan zuen. Horretarako multzo baten kardinala beste batena baino txikiagoa edo berdina izanik, lehenbizikoa bigarrenaren azpimultzo propio batekin bijekzioan jar bazitekeen[80]. Erlazio hau erreflexiboa eta trantsitiboa zela argi zegoen, baina propietate antisimetrikoa eta edozein bi kardinal konparagarriak izatearena (azken hau ordena totala edo lineala izango bazen baino beteko ez zena) gehiago kosta zitzaizkion. Lehenbizikoa gaur egun Schröder-Bernsteinen teorema bezala ezagutzen da, hauek frogatu zutelako 1898an. Geratzen zena Zermeloren *aukeraren axioma* erabilita baino ezin izan zen frogatu. Multzoen kardinalek orden lineal bat zutela ikusita, kardinalen aritmetika bat ezartzeari ekin zioten Cantor eta bere ondorengoek, ohiko aritmetikarekiko desberdintasun nabariak dituena. Bide horretatik baina, multzo teoria axiomatikoan barneratuko ginateke, matematikaren oinarrien inguruko kuestioak baztertuta.

Russellek Fregeren lanak aztertzerakoan aurkitutako "paradoxa" eta honek ekarritako matematikaren kanpo oinarrien krisiari buruz hitz egiterakoan aipatu genuenarekin amaituko dugu atal hau ere, Zermeloren ekarpen garrantzitsua labur azalduz: multzoen teoria axiomatikoa [Zermelo 1908].

Ez Dedekindek eta ez Cantorrek ez zuten Hilbertek Geometriarako emandako sistema axiomatiko baten parekorik eman. Lehenago aipatu izan dugun multzo teoria *naïve* horren baitan garatu zituzten beren teoriak. Multzoaren nolabaiteko definizioak ematen ahalegindu baziren, definizio hauek ez zuten matematikarako inongo errelebantziarik, pixka bat, Euklidesen elementuetan puntua, zuzena eta planuarekin gertatzen zen bezala. Hala ere denborarekin arrazonamenduen zorroztasunari lotutako arazoak planteatzen hasi ziren matematikari desberdinak. Gorago aipatu dugun

[80]Multzo finituen kasuan, zenbaki arrunten arteko ohiko ordena baino izango ez zena. Beraz kardinal finitu edo zenbaki arrunten orden naturala orokortzeko ahalegin bat bezala ikus zitekeen.

Zermeloren *aukeraren axioma* delakoaren harira sortutakoa, esaterako. Plano euklidearrean U eremu bat eta honetatik kanpo geratzen den x puntu bat hartzen bada, x puntuan zentratutako edozein diskok, U eremu hori ebakitzen duelarik, posible da U barruan x-era konbergitzen duen segida bat aukeratzea. Segida hori eraikitzeko nahikoa da x-en zentratutako eta $1/n$ erradioko diskoak kontsideratzea $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako, eta hauetako bakoitzean, hipotesiz existitzen dela esaten zaigun U eremuko puntu bat hartzea (gutxienez bat badagoela jakina baita). Era honetako argudioak denbora luzez onartu baziren ere, segidako puntuak aukeratzeko moduak zalantzak sortzen zituen, puntu hauek ez baitzeuden erabat determinatuak. Aukeratu beharreko elementu kopurua *infinitua* zenean konplikatzen zen, bereziki, modu intuitibo batean aukeraketa hori justifikatzea[81]. Multzo kontzeptua, guk dugun multzoaren intuizio fisikoarekin konparatzeko joera horretatik sortzen iren aipatutakoa bezalako zailtasunak. Multzoen izaerari buruzko eztabaida antzuak saihesteko, Hilbertek geometriarentzat, puntu, zuzen eta planuaren definizioak, saihestuz emanikoaren erako teoria axiomatiko bat ematea pentsatu zuen Zermelok. Zermeloren arabera edozein bi objektu matematikoren artean dagoen jatorrizko erlazio bakarra *pertenentziarena* litzateke: $x \in X$. Hemendik bigarren erlazio bat ondoriozta daiteke, partekotasun erlazionarena: $X \subset Y$ beteko zen, $x \in X$ erlazioa betetzen zuten objektu guztiek, $x \in Y$ ere betetzen bazuten. Horren ostean Dedekin eta Cantorren multzo teoria naïve-ko multzoen arteko eragiketak jaso zituen, hauek propietate moduan erabilitakoak axioma formarekin enuntziatuta. Horiez gain *hedaduraren axiomak* $X \subset Y$ eta $Y \subset X$ betetzeak $X = Y$ zekarrela zioen, hau da, multzo bat bere elementuek erabat determinatzen dutela. Multzo hutsaren existentzia postulatu zuen. bi objektu emanda, biok baino izango ez zituen *bikotearen* multzoa existitzen zela adierazi zuen. Multzo bat emanda bere parteen multzoa existitzen zela ezarri zuen. Aukeraren axioma eta infinituaren axioma gehitu zizkion bukatzeko. Beranduago, Russellen paradoxa baztertzeko *konprehentsio* axioma ere gehituko zion, multzo teoriako lehen sistema axiomatikoa izango zenari.

[81]Fisikoki egin ezina litzatekeelako.

1.3 Ondorioak

Matematikaren kanpo oinarriak eta barne oinarriak bereiztu ditugu lehenbiziko kapitulu honetan. Barne oinarrien bidez, XIX. mende amaieran eta XX. mende hasieran eman ziren eztabida logiko-filosofikoak gogoratu nahi ditugu, hau izan da matematikaren oinarrien inguruan hitz egiterakoan gehienek buruan izan ohi dutena.

Logizismoak, intuizionismoak eta formalismoak proposatutakoak matematikaren oinarritze logiko-filosofiko ahaleginak izan dira, eta beraz ez matematika beraren barnekoak. Ukaezina da eztabaida hauek izandako garrantzia, ez bereziki jardun matematikoarentzat, matematikariek apenas igarri baitzuten eztabaida horren eraginik, bai ordea matematikaren filosofiarako eta , batez ere, logikarako, Fregeren lehen mailako logikaren asmakuntzak eta Gödelen metamatematikaren limitazio teoremek argi uzten duten moduan. Analisiaren aritmetizatzearekin hasitako teoria matematikoen zehaztapen prozesuaren baitan kokatu behar dira eztabaida hauek.

Russellen paradoxa deitutakoak erakutsi zuen proiektu logizista burutuezina zela. Kontzeptu orori honen hedadura, edo propietatea betetzen zuten elementuen multzoa, elkar zekiokeela onartzeak kontraesanak sortzen zituen. Alferrikakoak suertatu ziren Fregek azken unean egindako, nahiz Russellek urte luzeetan egindako ahaleginak. Azken honen kasuan matematika eraikitzeko sistema axiomatiko bat eman nahian, proposatutako *infinituaren axiomak* eta bereziki *erreduzibilitate axiomak* ezin zutelako printzipio logiko izaera merezi.

Brouwerren ahalegina ezin da kontsideratu matematika klasikoa oinarritzeko ahalegin bat, hau erabat berformulatzea eta askoz esparru murritzago batean jokatzea eskatzen zuelako, matematikarientzat eta guk kapitulu hasieran esan dugunez, *filosofia-*

izatekotan-ere-azkena printzipioan oinarritzen garenontzat onartezina dena.

Hilberten programa finitista izan zitekeen hein batean, matematikaren konsistentzia metodo metamatematiko finitario *onargarrien* bidez frogatuz, eta *Russellen paradoxak* ekarritako ziurgabetasuna gainditu, eta matematika bere horretan utzita eztabaida ixteko modu interesgarriena matematikarientzat. Hau ere ezin ordea, Gödelen ez-osotasun teoremek argi erakutsi zuten moduan. Matematikariek ziurgabetasunean jarraitu beharko zuten, matematika jasoko zuen ezein sistema formalen konsistentziak, konsistentzia hori bere baitan frogatzea ezinezko egiten baitzuen.

Zermelok eskainitako multzoen teoria axiomatikoa izango litzateke, eztabaida guzti honetan matematikaren jardunerako eginiko ekarpenik garrantzitsuena. Dedekind eta Cantorren lanetan erakutsi zen, gainontzeko kontzeptu matematikoak adierazteko, multzoek zeukaten gaitasuna. Edozein kontzeptu matematiko eraiki daiteke multzoak eta hauen arteko eragiketak erabilita. Zermelok teoria axiomatiko gisa eman zuen, teoria honen oinarrizko kontzeptuak isolatuz, gerora ikusi izan da Peanoren axiomak froga zitezkeela Zermeloren axiometatik abiatuz, eta bide batez multzoen izaerari buruzko eztabaida filosofikoak baztertuz. Hau da gaur egungo matematikari gehienentzat, multzo teoriak matematikaren oinarritze "estandar" bat eskaintzearen arrazoia. Ez da ahaztu behar gainera *Russellen paradoxa* saihesteko asmoz axioma bat ezarri zitzaiola Zermelok hasieran emandako sistema axiomatikoari, *zehaztapen axioma eskema* hain zuzen ere, propietate bat betetzen duten objektuak, aurrez emandako multzo batean aukeratu beharra inposatzen duena. Gödelen teoremek etorkizunean behartutako ziurgabetasunaren aurrean soluzio praktikoak bilatzeko modua izan daiteke hau: kontraesanen bat agertzen bada, esparru zelaia ahalik eta gutxien murriztuko duen aldaketa ezarri, kontraesan hau saihesteko.

Gödelen garaitik ordea matematikaren oinarrien inguruko kuestioek errelebantzia galdu dute logikan bertan. Matematikari lotutako logikak bere bidea egin zuen matematikaren oinarrietatik gero eta gehiago apartatuz, gaur ereduen teoria, frogaren teoria edo errekurtsioaren teoria bezalakoek erakusten dutenez. Matematikaren oinarrien inguruko eztabaidetan bila dezakegu guzti hauen jatorria, baina gaur ez dihardute horretan. Gaur matematikaren kanpo oinarritzeak bilatu izan duen segurtasun eskemarik eskaintzerik ez dagoela onartu beharra dago. Matematikak ez du behar (izan ere, ezinezkoa da) eman nahi izan zaion bezalako oinarritze logiko-filosofikorik. Gogora ditzagun Shapiroren [Shapiro 2000] hitzak honen harira: "ezin dezakegu matematika bera baino seguruagoa den ezein esparrutan oinarritu".

Matematikaren oinarritze logiko-filosofiko saiakera hauen ondoan, matematikaren barne oinarritzearen inguruko eztabaidaren garrantzia azpimarratu nahi izan dugu. Matematikaren barne antolaketarekin zerikusi gehiago duten prozesu historiko esanguratsuak aztertu ditugu lehen kapituluaren bigarren atalean. Matematikak kanpo-oinarritzerik behar ez duela ondorioztatuta, matematikaren filosofiarako teoria matematikoen zehaztapen, antolaketa eta orokorpen prozesuen azterketa da garrantzitsua (hau da, argipen, zehaztapen eta sistematizazio prozesuen azterketa).

Era honetako hiru prozesu historiko nagusi aipatzen ditu Schwartzek [Schwartz 1997]: Euklidesek bere *Elementuen* bidez ekarritakoa, metodo axiomatikoa arrazonamendu matematikoaren eta teoria matematikoen estrukturazioaren lehen lerrora ekarriz. Bolzanok eta Cauchyk abiatutako analisiaren zehaztatze prozesua, besteak beste, aurrez aipatu dugun kanpo oinarritzeen eztabaidei abiapuntua ezartzeko balioko duena, bidean multzoarena bezalako kontzeptu garrantzitsuak azaleratuz. Eta hirugarrenik bera partaide zuzen izan zuen Bourbaki proiektuak XX. mendearen 2. erdian ekarriko zuen matematika estrukturalista.

Bourbakiren kasua, gure tesiari zuzenen lotzen zaiona dela kontsideratuta, bigarren kapitulurako utzita, beste bi kasuen gainbegirada zabala eman nahi izan dugu, zehaztasun gehiegitan sartu gabe, baina, guri hemen interesatzen zaigun zentzuan errelebanteenak iruditu zaizkigun alderdiak azpimarratuz. Metodo axiomatikoak, amaitutako teoria matematikoen antolaketan, eta estrukturazioan jokatzen duen papera azpimarratuz lehenbiziko kasuan, aurrerago Bourbakik kontutan hartuko duena. Ikusi dugun bezala Hilbertentzat, matematikaren, eta orokorrean, zientziaren garapenean, esparruaren zabalkundea bezain garrantzitsua da teoriaren berrestrukturazioa, eta honen zatien estruktura logikoaren argipena. Garapen handiko teoriak berrestrukturatzeko lan-tresna bat litzateke, beraz, metodo axiomatikoa.

Schwartzek aipatzen ez zuen kasu bat aztertu dugu gero. Ikusiko dugunez aljebrak esparru matematikoak berrantolatzeko erakutsitako ahalmen handiaren lehenbiziko adibide bezala har dezakeguna: geometria kartesiarraren asmakuntzarena, hain zuzen ere. Fermat eta Descartesen garaian, aljebrari buruz hitz egiterakoan, zehazki kalkulu aljebraikoari gagozkiola ahaztu gabe, matematikaren edozein esparrutan eragiketa pertinenteak definitzeak izan ohi duen garrantzia erakusten digu adibide historiko honek, eragiketaren bidez, esparru horretan aljebra "sartzea" lortzen dugulako, honek daukan kalkulurako eta sistematizaziorako ahalmena begibistakoa suertatu izan delarik. Descartesek garai hartan azpimarratzen zuen matematikaren baitan aljebrak duen izaera berezi hau. Matematikaren esparru askoren sakoneko antolaketan aljebrak jokatu izan duen paper ordenatzailearen aurrekari bat ikusi dugu adibide honetan. Estruktura aljebraikoen agerpenarekin indartuko den paper bat, hurrengo kapituluetan Galois eta Kleinen lanetan aztertzen ahaleginduko garen moduan.

Azkenik matematikan eta bereziki analisian intuizio geometrikoak historikoki jokatutako abangoardia paper garrantzitsuaren aurrean, arrazonamenduen zehaztapenerako, eta teoriaren estrukturaziorako, hauek albo batera lagatzea eskatzen duten kontzeptu berrien bilaketan oinarritutako kasu historiko garrantzitsua gogoratu dugu. Bi aipatzearren kalkulu infinitesimalaren zentruan kokatuko den limitearen kontzepzio estatikoa dugu, batetik, aipatutako intuizio fisiko-geometrikoei lotutako infinitesimoak baztertuz, funtzioen jarraitutasuna, deribagarritasuna eta integragarritasunerako oinarri komuna eskainiko duena. Dedekinden ebakidurak, bestetik, aintzinatetik irekita zirauen, zenbaki arrunt eta zenbaki errealen arteko bateratze kontzeptuala ekarri zuena, honek suposatzen zuen teoria matematikoen sinplifikazio eta berregituraketarekin. Analisiaren aritmetizatzeak erakutsi zuen *Peanoren axiomek* definitutako zenbaki arrunten multzoan analisia azken fineanmodelizatzea posible zela, eta beraz, "eraikuntza matematikoaren" oinarrian zenbaki arruntak kokatu behar zirela. Dedekind, Cantor, eta Zermeloren lanek, azkenik, aritmetika bera eta ondorioz, matematika osoa, zenbakiarena baino orokorragoa kontsidera zitekeen multzoen teoria axiomatiko batean modelizatu zitekeela erakutsi zuten. Eraikin matematiko osoa eraiki zitekeen multzoekin. Baina antolaketa egokiaren kuestioak irekita jarraitzen zuen.

2 Estrukturalismoa

2.1 Estrukturalismoa aljebran

2.1.1 Estrukturen genesia Galoisen lanetan

Evariste Galoisen lanetan ikusten da argien aldaketaren genesia aljebraren baitan [Van der Waerden 1985]. Maila txikietako ekuazio polinomikoen erradikalen bidezko ebazpenak emateko metodo ezagunen azterketatik, ekuazio polinomiko orokorra erradikalen bidez ebazteko metodo orokor bat bilatzeko Lagrangek XVIII. mendearen bigarren erdian lortutako emaitzetatik abiatuta, jatorrizko problemaren permutazio teoriaren baitako talde-teoriazko karakterizazio bat ematea lortu zuen Galoisek bere [Galois 1846] txosten famatuan ([Wussing 1969], [Kiernan 1971]). Problema orokorraren funtsa osotasunean harrapatzeko ikuspuntu abstraktuago bat behar zela jabetu zen Galois. Ikuspuntu berriaren funtsezko izaera, problema partikular guztiak aldi berean soluzionatzean zetzalarik. Objektu konkretuetatik (ekuazioak) abstraktuetara (ekuazioen erroen permutazio-talde jakinak) pasatuz lortzen zen ikuspuntu berria: estrukturalista.

Galois iritsi arte aljebra hein handi batean ekuazio polinomikoen ebazpenerako teknikak bilatzen zituen matematikaren esparrua bezala deskriba zitekeen[1]. Galoi-

[1] Corryk defendatzen du aljebraren ikuspegia ez dela Galoisekin aldatzen, Van der Waerdenekin baizik. Ikusi [Corry 1996], bereziki 1. kapitulua.

sen garaian ekuazio polinomikoen ebazpenari buruzko ezagutzak noraino iristen ziren labur ikustea egokia da puntu honetan, Galoisen lanaren tamaina eta garrantzia hobeto ikusteko[2].

Eskola urteetatik guztioi hain ezaguna egiten zaigun formula koadratikoa edo ekuazio polinomiko koadratikoen erroak erradikalen bidez kalkulatzeko formularen oinarrian dagoen 'karratua osatzearen' teknika, Babiloniarren garaitik erabilia zen, esaterako, manipulazio geometrikoetan. Eta, jadanik al-Khawarizmik (780-850) sistematikoki landu zituen bere *al-Jabr* lanean. Ez zen aurrerapen nabarmenik izango ez matematikan orokorrean, ez eta konkretuki aljebran ere, hurrengo zazpirehun urteetan. Matematika europarraren lehen fasea greziarrek eta arabiarrek eginikoaren errepikapen estatikoan oinarritu zen.

Escipione del Ferro (1465?-1526), Niccolo Fontana "Tartaglia" (1499 edo 1500-1557), Girolamo Cardano (1501-1576) eta Ludovico Ferrari (1522-1569) XVI. mendeko matematikari italiarrak izan ziren hainbesteko geldialdiaren ostean aurrerapen matematiko esanguratsuak egiten hurrengoak. Cardanok bere *Ars Magna* liburuan aipatzen du, adibidez, del Ferro izan zela ekuazio kubiko orokorrarentzat erradikalen bidezko soluzioa ematen lehenbizikoa, gero berak bere liburuan jasoko zuena beste metodo berritzaile batzuekin batera. Ekuazio koadratikoaren kasuan jarraitutako metodoaren analogoa jarraitu zuen ekuazio kubikoaren erradikalen bidezko soluzioa emateko. Ferrarik ekuazio koartikoa, erresolbente kubiko baten laguntzaz, erradikalen bidezko soluziona daitekeela erakutsi zuen, eta hau ere jaso zuen Cardanok. Ekuazio klase desberdinen soluzioak emateaz gain, *Ars Magna* liburuan beste bi aurrerapen garrantzitsu ere abiatu ziren: zenbaki negatibo eta konplexuen nolabaiteko ezagutzarena, hain zuzen ere. Zenbaki negatiboen erro karratuak, zenbakitzat hartu beharrean kalkuluetan tarteko balio laguntzailetzat hartu zituzten hasieran, ohiko

[2]Ikusi [Tignol 2001] eta [Bewersdorff 2004] Galoisen teoriaren garapen historiko-metodologikoaren zehaztasunak ulertzeko.

erregela aritmetikoak aplikatuz ekuazioen soluzio esanguratsuak lortzeko balio zutela ikusi zutenean[3]. Gerora erabateko zilegitasuna lortuta, beren horretan azterketarako interesgune bilakatuko ziren zenbaki konplexu izena hartuta.

Ars Magna-n jasotako ekuazio kubiko eta koartikoaren soluzioek berriro ere bi mendeko geldialdi bat ekarri zuten. Denbora hori guztia behar izan zuten matematikariek metodo berriek ekarritako ideia berriak aztertu eta ondo ulertzeko. Batetik notazioari lotutako zailtasunak gainditu behar izan ziren, aurrekoek erabiltzen zuten notazioak ez baitzuen ekuazio aljebraikoak lantzeko bide eraginkorrik ematen[4]. Bestetik, eta aurrekoari lotuta, poliki hau ere, polinomioaren eta ekuazio polinomiko orokorraren ideia azaleratu zen. Honela sortu zen, kasu partikularrak albo batera utzi gabe, ekuazio polinomiko orokorra modu sistematikoan aztertzeko beharra. Bi mendeko tarte horretan aurrerapenik esanguratsuena François Viètek (1540-1603) eginikoa izan zen. 1591n kaleratutako *In artem analyticem isagoge* aipatutako bi zentzuetan ekarpenak egin zituen. Berari zor zaio, besteak beste, ekuazio batean agertzen diren kantitate ezagun nahiz ezezagunak hizkien bidez designatzeko ohitura emankorra. Bereziki garrantzitsua izan zen, kantitate ezagunak hizkien bidez designatzeko ideia, zenbakizko adibide konkretuetatik adibide orokorretan pentsatzeko aukera ematen zuen heinean. Horrez gainera, espresio aljebraikoen trataera formala ere ekarri zuen, zenbakiekin beharrean hizkiekin kalkuluak nola egiten ziren erakutsiz.

Notazioari lotutako berrikuntzez gain, ekuazio polinomiko orokorren propietate desberdinak aurkitu zituen: emaitzak aldatu gabe ekuazio batekek onartzen dituen transformazioak; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erroak dituen ekuazioa eraikitzeko metodoa, polinomioaren koefizienteak erroen *oinarrizko polinomio simetriko* bezala interpretatuz, *Vièteren erroen teorema* deitu izan denean[5]. Bada ordea hau orokortzen duen

[3]Horrela gertatu zen, besteak beste, Rafaele Bombelliren (1526-1572) lanetan.

[4]Ikusi [Cajori 1974]

[5]*Vièteren erroen teoremaren* arabera $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ polinomio orokor batentzat, $-a_{n-1} = x_1+x_2+\cdots+x_n$; $a_{n-2} = x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$; $\ldots$; $(-1)^n a_0 = x_1x_2\ldots x_n$ daukagu, eta ekuazio hauen eskuineko parteetako espresioak dira *oinarrizko polinomio simetriko*

emaitza bat, Descartesi zor zaiona eta 1637an *Geometrie* liburuan publikatutakoa, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erroak (eta ez besterik) dituen polinomioa $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ dela erakusten duena. Karl F. Gauss izango da ordea, ahalegin guzti hauek biribilduko dituena, koefiziente konplexudun n. mailako $p(x)$ polinomio batek zehazki n erro konplexu dituela eta $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ eran adieraz daitekeela dioen *aljebraren teorema fundamentala* frogatuz.

Polinomioen estruktura hobeto ezagutzeko balio izan zuten emaitzak dira azken paragrafoan deskribatu ditugunak. Hala ere polinomioen erroak kalkulatzeko ez dute biderik ematen. Lagrange (1736-1813) eta Vandermonde (1735-1796) matematikari frantsesen lanak izango dira problema honen behin betiko soluzioaren bilaketari bultzada definitiboa emango diotenak.

Lagrangek bere aurreko emaitzak aztertu eta sistematizatzeko lana hartu zuen bere gain: zein zen ekuazio koadratikoa, kubikoa eta koartikoaren soluzioek gordetzen duten izkutuko arrazoia, ekuazio guzti hauek erradikalen bidez ebazgarriak izateko? Bere azterketek, era honetako soluzio bat 5. mailako polinomioetarako ezinezkoa dela ondorioztatzera eraman bazuten ere, ez zuen lortu horrelako emaitzarik frogatzea. Baina bai beranduago etorriko ziren ahaleginak bide onetik bideratzea eta 60 urteren buruan Galoisen eskutik soluzioa iristeko bidea zabaltzea. 1770-71n kaleratutako *Refléxions sur la theorie algébrique des équations* lanean argitaratu zituen Lagrangek ekuazio polinomikoen ebazgarritasunean egin zituen ahaleginak. Behin betiko emaitzarik ezean, Lagrange gauza izan zen irekitako bidearen sakontasuna antzemateko 'kalkulu konbinatorial' batean oinarritutako "teoria berri eta orokor baten oinarriak" ezarri zituela aipatzerakoan. Bere lanetan agertuko zaigu ekuazio polinomiko edo aljebraikoen permutazio talde-teoriazko tratamendua lehenengoz. Atal honen lehen partean deskribatu dugun estrukturaren kontzeptu modernoaren lehen intuizio lauso

deitzen ditugunak.

bat ikusten du hemen Bourbakik[6]

Bigarren, hirugarren eta laugarren mailako ekuazio polinomikoen erradikalen bidezko soluzioak sistematikoki aztertuz, konturatu zen formula ezagun hauetan erradikalen bidez adierazita zetozen bitarteko balioak, hasierako $p(x)$ polinomioaren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erroen polinomio bezala adieraz zitezkeela. Horren ondorioz $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomio baten erroak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ izanik, $h(x_1, \ldots, x_n)$ polinomio orokor bat hasierako polinomioaren $a_0, \ldots, a_{n-1}$ koefizienteen funtzioan, eta Vièteren erroen teoremaren arabera, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$, $\ldots$, $x_1x_2 \ldots x_n$ oinarrizko polinomio simetrikoen funtzioan nola determina zitekeen ikusi nahi izan zuen Lagrangek. Zehazki esanda, nola aurki zitekeen $h(x_1, \ldots, x_n)$ polinomioa soluziotzat zuen, eta koefizienteak $p(x)$-en $x_1, \ldots, x_n$ erroen oinarrizko polinomio sinpleen funtzio zituen θ_h polinomio sinple bat.

Hau ikusteko Lagrangek emaitza garrantzitsu bat frogatu zuen: edozein *polinomio simetriko*, hau da, bere aldagaien ezein permutazioren eraginpean inbariante dirautenak, bere aldagaien oinarrizko polinomio simetrikoen polinomio direla. Eta emaitza honi esker, bilatutako θ_h honela kalkula zitekeela, simetrikoa izanik, eskatutako baldintzak betetzen zituelako, Lagrangek frogatutako emaitzaren arabera:

$$\theta_h(t) = (t - h(x_1, x_2, \ldots, x_n))(t - h(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})) \cdots$$

non, biderkagai bakoitza kontuz aukeratutako $x_1, \ldots, x_n$ erroen $n!$ permutazioetako bati dagokion. Aukeraketa horren arabera, σ permutazioak, $h(x_1, \ldots, x_n)$ polinomioak, $x_1, \ldots, x_n$ aldagaiak permutatzean har ditzakeen balio desberdin bakoitza soilik behin agertuko da biderkaduran.

Lagrangeren lanak labur, baina zehaztasun pixka batekin azaltzen saiatu gara,

[6][Stein 1988] artikuluan dator aipatua pasartea zehaztasunez: [Bourbaki 1974, 100. or.].

bere atzetik etorri zirenengan erangin handia izateaz gain, bereziki Galoisen kasuan, guk hemen ikusi nahi dugun matematika ez-estrukturalistatik matematika-estrukturalista deitzen dugun horretarako jauziaren gunea, Lagrangek abiatutako ekuazio aljebraikoen ebazpenerako, permutazioen talde-teoriazko azterketak osatzen duelako. Lagrangeren lorpen handitzat har dezakegu ekuazio baten soluzioen permutazioen garrantziaz ohartzea. Bostgarren mailako ekuazioaren ebazpenak aurkezten zituen zailtasunen norainokoaz jabetzen ere lehenengoetakoa izan zen.

Ruffini (1765-1822) izan zen bosgarren mailako ekuazio orokorra erradikalen bidez ebatziezina zela frogatzen saiatzen lehenbizikoa. Hau frogatzeko egin zituen ahaleginek hutsuneak badituzte ere, bere argudioak sakonak izan ziren, eta behin betiko frogatik hurbil geratu ziren. Balizko erradikalen bidezko soluzio batean agertu beharreko bitarteko balioak, Lagrangek erakutsitako bidetik, $x_1, \ldots, x_5$ erroen polinomoak izan beharko luketela, eta hau bosgarren mailako ekuazioaren kasuan, maila txikiagokoenean ez bezala, ezinezkoa zela erakutsi nahian. Bere lanean permutazioen teoria ekuazioen ebazgarritasunerako osagai estrukturala kontsideratu zuen, beranduago Cauchyk, ezagupen handiagoarekin, egingo zuen bezala teoria independente bezala sistematikoki garatuz.

Abel (1802-1829) izan zen, hala ere, Ruffiniren ahalegina burura eramango zuena, haren lanak faltan zituen gorputz teoriako printzipioak modu argian formulatuz. Galoisen lanerako ere, laster ikusiko dugunez, talde teoriako printzipioekin batera ezinbestekoak izango zirenak, bestalde. Ez ziren hor amaitu, ordea, Abelen lanak. Gaussek $x^n - 1 = 0$ *polinomio ziklotomiko* orokorra, hau da, zirkunferentzia n zatitan banatzen duten ekuazio aljebraikoa, erradikalen bidez ebazgarria zela erakutsia zuen ordurako. Abelek Gaussen metodoa erabilita antzeko emaitzak lortu zituen, zirkunferentzia funtzio eliptikoetara orokortuz, hauetako batzuk n zatitan banatzen zituzten ekuazio aljebraikoen erradikalen bidezko ebazpena karakterizatuz. Ekuazio orokorraren erradikalen bidez ebazgarriak ziren ekuazio aljebraikoak karakterizatzeko ahaleginean, gero Galoisek lortutako emaitzetatik oso hurbil zela [Bourbaki 1974, 5. kap.], gaisotuta hil zen 27 urte zituela.

Gauss, Rufinni eta Abelen ostean bi ekuazio klase nagusiak sakonki landuak izan ziren emaitza dibergenteekin: edozein mailatako ekuazio ziklotomikoak erradikalen bidez ebazgarriak dira, baina bosgarren edo maila handiagoko ekuazio orokorra, aldiz, ez. Hurrengo galdera logikoa hau zen: ekuazio guztiak ez badira erradikalen bidez ebazgarriak, baina batzuek bai, zeintzuk dira zehazki horiek, eta zerk karakterizatzen ditu? Lagrange, Ruffini eta Abelen lanek, erroen arteko erlazio polinomialetara zuzentzen zuten arreta. Bazirudien hauek zirela ekuazio aljebraiko baten "konplexutasuna" mailaz jaitsi ahal izatearen arduradunak. Horixe zen hain zuzen ere Lagrangeren lanek edo Gauss eta Vandermondek emandako polinomio ziklotomikoen ebazpen orokorrak erakusten zutena.

Adibide batzuk esandakoa argitzeko asmotan[7]. $p(x) = x^3 - 3x - 4 = 0$ ekuazio kubikoaren kasuan, esaterako, Cardanoren formulak erabilita ikus daiteke

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}, \\ x_2 &= \xi\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \xi^2\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \quad \text{eta} \\ x_3 &= \xi^2\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \xi\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

direla ekuazioaren hiru erro konplexuak, $\xi = (-1+\sqrt{3}i)/2$ unitatearen hirugarren erroetako bat izanik. Lagrange, Ruffini eta Abelen lanek erakutsitako erroen arteko erlazio polinomialak aipatzen ditugunean, kasu honetan, esaterako, betetzen diren era honetako erlazioetaz ari gara: $x_1 + x_2 = -x_3$, $x_1x_2x_3 = 4$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$, etab. $q(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x - 2 = 0$ ekuazioa ere Cardanoren formulak erabilita

[7] [Bewersdorff 2004]-tik eta honek aipatzen duen [Soicher & McKay 1985]-tik hartu ditugu atal honetan erabilitako adbideak.

ebatzi daiteke. Kasu honetan, x_1, x_2, x_3, x_4 erroak modu jakinean izendatuz gero, $x_1+x_3+x_2x_4=0$ erlazioa betetzen dela konproba daiteke, eta aldiz, erlazio horretan erroak permutatuz lortzen diren $x_1+x_4+x_2x_3=0$ edo $x_1x_2+x_3x_4=0$ ez lirateke zuzenak, erroen izendapen jakin horrentzat. Vandermondek erradikalen bidez ebatzitako bosgarren mailako $r(x)=x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$ ekuazioaren kasuan, bukatzeko, x_i bost erroen izendapen jakinerako, ondoko erlazioak aurki ditzakegu: $x_1^2-x_2=2$, $x_2^2-x_3=2$, $x_3^2-x_4=2$, $x_1x_2-x_1=x_4$, $x_2x_3-x_2=x_5$, etab. Erroen arteko erlazio polinomialen kopurua, polinomioaren "konplexutasunaren" mailarekin erlazionatuta zegoela ikusi zen.

Galoisen ekarpen nagusia, ordura arte aurrekaririk gabekoa baina gerora matematikan beste hainbat problema ebazterakoan oso emankorra dela ikusi izan dena, honela laburtu dezakegu: problema baten ikerketan aurrera egiteko, problemari lotutako objektu sinpleago eta orokorrago bat aztertzea[8]. Galoisek aztergai zituen ekuazio polinomikoetako bakoitzari *talde* deitutako objektu bana egokitu zien, konkretuki, gerora bere omenez ekuazioaren *Galoisen taldea* deituko zena. Ekuazio polinomiko baten erroen permutazioen azpimultzo jakin batek osatzen zuten esandako taldea, permutazioen konposaketa eragiketa bezala harturik. Ekuazio polinomikoetatik, hauei egokitutako Galoisen taldeetara pasatzeak, abantaila nabarmen bat zekarren. Ekuazio polinomikoek ez bezala, posible zen hauen Galoisen taldeak sailkatzea, zegozkien ekuazioak, hauen erradikalen bidezko ebazgarritasunaren arabera sailkatuz. Besteak beste, ekuazioen ezaugarri garrantzitsuenak (irreduzibilitatea, erradikalen bidezko ebazgarritasuna, ebazgarria izatekotan behar izango zen erradikalaren maila), ekuazioaren Galoisen taldeak jasotzen zituen, eta posible zen ekuazioari inongo erreferentziarik egin gabe, bere taldeari begiratuz propietate hauek determinatzea. Eta, garrantzitsua dena, ekuazio posible kopurua, hauei egokitzen zaizkien Galoisen

[8]Galoisen lanen azterketa zehatzak: [Kiernan 1971], [Edwards 1984]. Azken honetan Galoisen paper originalaren ingeleserako itzulpena eta komentarioak aurki daitezke. [Bewersdorff 2004] eta [Tignol 2001], ez dira bereziki Galoisen lanen azterketara mugatzen baina kapitulu interesgarriak eskaintzen dizkiote, Galoisen lanen ekarpenak argitze aldera.

taldeak baino askoz handiagoa da, sailkapena asko erraztuz.

1831ko eskuizkribuan [Galois 1846] Galoisek lehenbizi ekuazio bati lotutako Galoisen taldea definitu zuen, gero honen jokaera aztertu zuen, oinarriko gorputzaren hedaduren funtzioan, eta ekuazio bat erradikalen bidez ebazgarria izateko, bere Galoisen taldearen araberako beharrezkoa eta nahikoa zen baldintza bat ondorioztatu zuen. Eta eskuizkribu laburra ixteko emaitza honen maila leheneko ekuazio irreduzibleetarako aplikazio bat eman zuen. Ikusi dezagun hau guztia zehaztasun haundiagoz, guri dagokiguna argitzeko asmotan.

Galoisek kantitate “ezagunak” errekurtsiboki definitu zituen, ekuazio polinomikoen soluzioen bilaketa, kantitate “ezagun” guztiak determinatzeko prozesuarekin baliokidetasunean jarriz. Emandako polinomioaren koefizienteak izango ziren hasierako kantitate “ezagunak”. Hortik aurrera, kantitate “ezagun” berriak, kantitate “ezagunak” lau eragiketa aritmetikoen bidez konbinatuz, gaur hauen funtzio arrazional deituko genituzkeenak izango lirateke. Balio jakinak “erantsiz”, bereziki kantitate “ezagunen” erroak, eta hauek besteekin lau eragiketen bidez konbinatuz areagotu zitekeen kantitae “ezagunen” multzoa.

Esandakoak argitze aldera adibide bat har dezagun. Esaterako, $p(x) = x^3 - 3x - 4 = 0$ ekuazio kubikoa hartuko bagenu, 1, 0, -3 eta -4 izango lirateke hasierako kantitate “ezagunak”, eta hauen arteko lau eragiketa aritmetikoen bidez, zenbaki arrazionalen $\mathbb{Q}$ multzora zabalduko genuke bigarren urrats batean, kantitate “ezagunen” multzoa. Esan dugunari jarraituz, kantitate jakin batzuek, bereziki lehendik “ezagunak” diren kantitateen erroak, “eranstea”, eta hauek aurrekoekin lau eragiketen bidez konbinatzea da, Galoisek kantitate “ezagunen” multzoa handitzeko onartutako beste bidea. Esaterako, $\sqrt{3}$ aukeratuko bagenu, ondoko kantitate “ezagunen” multzora iritsiko ginateke:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Horrela bada, polinomio jakin bati erlazionatutako kantitate "ezagunen" multzoa, lau eragiketa aritmetikoekin, gaur egun *gorputz* bezala ezagutzen duguna izango litzateke. Galoisek ikusi zuen, polinomio baten erradikalen bidezko ebazpen prozesua, polinomioaren koefizienteen funtzio arrazionalen gorputzaren hedadura konkretuak, hau da, polinomio horri lotutako kantitate "ezagunen" gorputza, eraikitzearekin paraleloan zihoala.

Gure adibidearekin jarraituz, ekuazio kubikoetarako Cardanoren formula erabilita ikus daiteke $p(x) = x^3 - 3x - 4 = 0$ ekuazioaren erro bat

$$x_1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$$

dela. x_1 erroa barnean duen, $p(x)$ polinomioari erlazionatutako hasierako kantitate "ezagunen" $\mathbb{Q}$ gorputzaren, hedadurarik txikiena lortu bitarteko urratsez urratseko hedadura segida bat iradokitzen du x_1 erroak:

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2+\sqrt{3}})$$

Kasu honetan,

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} = 1/(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})$$

idatz daitekeenez,

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}, \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2+\sqrt{3}})$$

daukagu, eta azken hau litzateke x_1 barnean duen bilatutako hedadura. Prozesuak aurrera jarraitu beharko luke, x_1, x_2 eta x_3 hiru erroak barnean hartzen dituen $\mathbb{Q}$ gorputzaren hedadura txikiena lortu arte. Prozesu honekin lotu zuen, beraz, Galoisek polinomioen erradikalen bidezko ebazpen prozesua.

Gorago esan dugu erroen arteko erlazio polinomial kopuruak, ekuazioaren konplexutasunaren mailaren neurria eman zezakeela iradokitzetik abiatu zela Galois. Horren harira, $p(x)$ polinomio bakoitzerako eta kantitate "ezagunen" K gorputz bakoitzerako, $B_K(p)$ multzoa definitu zuen Galoisek: $p(x)$ polinomioaren $x_1, \ldots, x_n$ erroen, K gorputz gaineko erlazio polinomialetatik eratorritako polinomioen multzoa. Aurreko adibideetan ikusi dugunaren arabera

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{Q}}(p) =& \{x_1 + x_2 + x_3, x_1x_2x_3 - 4, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6, \ldots\}, \\ B_{\mathbb{Q}}(q) =& \{x_1 + x_3 + x_2x_4, \ldots\} \quad \text{eta} \\ B_{\mathbb{Q}}(r) =& \{x_1^2 - x_2 - 2, x_2^2 - x_3 - 2, x_3^2 - x_4 - 2, x_1x_2 - x_1 - x_4, x_2x_3 - x_2 - x_5, \ldots\} \end{aligned}$$

izango lirateke, hurrenez hurren, Galoisek definitutako multzo hauek. Kontuan izan, K gorputza aldatuz gero, B_K multzoa aldatu egingo litzatekeela. Esaterako, $r(x)$ polinomioaren kasuan, bere erroek $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4\sqrt{2}$ erlazio polinomikoa ere betetzen dute, aurrez zerrendatutakoez gain, hortik eratorritako polinomioa ez legoke $B_{\mathbb{Q}}$ multzoan, baina bai ordea $B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ multzoan. Argi ikusten da, kantitate "ezagunen" gorputza handituz doan heinean, honi dagokion polinomioen multzoa ere handituz joango dela.

$p(x) = 0$ ekuazio polinomiko baten konplexutasuna, bere erroen artean aurki zitezkeen erlazio polinamial kopuruarekin txikitzen bada, B_K multzo handia duten ekuazioek konplexutasun txikia izango dutela ulertu behar da. Ekuazio baten konplexutasunaren neurria emango liguke horrela bere B_K multzoak. Kontuan izan behar da, hala ere, ez dela inola ere lan erraza, $p(x)$ polinomio bat eta kantitate "ezagunen"K gorputz bat finkatuta, $B_K(p)$ multzoa determinatzea[9]. Galois gauza

[9]Terminologia argitze aldera erabilitako adibideetan, antzematen zen hori, erlazio polinomialak

izan zen, hala ere, ekuazio polinomiko baten "konplexutasuna" modu sinpleagoan karakterizatzeko, horretarako, $B_K(p)$ multzoa zuzenean erabili beharrean, $B_K(p)$ inbariante uzten zuten, $p(x)$ polinomioaren erroen permutazioek konposaketarekiko zituzten erlazioak aztertuta. Permutazio horiek osatuko zuten $B_K(p)$ multzoari lotutako Galoisen $Gal(B_K(p))$ *taldea*.

Ekuazio polinomiko baten K kantitate "ezagunen" gorputz baten gaineko *Galoisen taldea*, definizioz, B_K multzoko polinomioak, B_K multzoko polinomioetan transformatzen dituzten $\{x_1, \ldots, x_n\}$ erroen permutazioek osatzen dute[10]. Hau da, hasierako ekuazioaren erroen arteko K gaineko erlazio polinomialak, hasierako ekuazioaren erroen arteko K gaineko erlazio polinomikoetara daramatzaten permutazioek osatzen dute K gorputz gaineko Galoisen $Gal(B_K)$ taldea. Permutazio hauek talde bat osatzen dutela konturatu zen Galois[11], eta talde estruktura horretan zetzala arazoaren muina. Batetik argi dago permutazioen konposaketak beste permutazio bat emango duela beti, ezinbestean. Bestetik permutazioen konposaketa elkarkorra da edozein azpimultzotan. Identitatea beti egongo da barruan. Eta taldeko permutazio batek, taldearen definizioagatik, B_K-ko elementu bat B_K-ko elementu batean transformatzen badu, halaxe egingo du alderantzizko permutazioak ere. Gezurra badirudi ere, Galoisen talde honek ekuazioaren ebazgaritasunari buruzko informazio guztia gordetzen duela erakutsi zuen Galoisek.

B_K multzoan aurki daitezkeen polinomioen araberakoa da, beraz, $Gal(B_K)$ permutazio taldea. Bi klasetako polinomioak bereiztea interesatuko zaigu. Batetik

lortzeko moduaren erreferentziarik eman ez dugunean.

[10] $x_1, \ldots, x_n$ erroen permutazioei, edo berrordenaketei buruz hitz egiteko nahikoa zaigu $1, \ldots, n$ lehen n zenbaki arrunten permutazioei buruz hitz egitea. Gogoratu S_n denotatu ohi dela lehenbiziko n zenbaki arrunten permutazioen multzoa. S_n multzoko σ permutazio bakoitza {1,. . . ,n} multzotik multzo berbererako aplikazio bijektibo bat bezala ikus daiteke; azken batean, lehen n zenbaki arrunten ordenaketa bat baino ez dena. Horrelako σ batek polinomioen n erroen hurrengo permutazioa emango digu: $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$.

[11] Hemen berriz ere, aurreko oin-oharreko bidea aukeratu dezakegu, eta S_n multzoa aplikazioen konposaketarekiko talde bat dela ikusi. Finean esaten ari garenaren bertsio abstraktua izango da, gaurko matematematikan egiten den moduan.

polinomio simetrikoak edo tribialak deituko ditugunak bereiztuko ditugu; edozein permutazioren eraginpean inbariante dirautenak izango dira eta ez dute, horren ondorioz, problemaren ebazpenean aparteko garrantziarik. Eta bestetik, problemaren ebazpenean zeresana izango dutenak: polinomio ez-simetrikoak. Argi dago B_K multzoko polinomio guztiak simetrikoak diren kasuan $Gal(B_K)$ taldea permutazio guztiek osatutakoa izango dela. Aldiz, adibidez, Vandermondek erradikalen bidez ebatzitako $r(x)$ polinomioaren kasuan, ikusi daiteke, emandako definizioaren arabera, bost erroen 120 permutazio posibleetatik, soilik bostek mantentzen dutela $B_{\mathbb{Q}}(r)$ inbariante. Galoisen taldea polinomioaren konplexutasuna handitzearekin txikituko litzatekeela dirudi. Taldeen kasuan gertatu ohi denez, ordea, tamainak baino garrantzia handiagoa izango du, talde estrukturak berak soluziorako bide izate horretan.

Galoisen taldeak esandako informazio hori gordetzen duela hobeto ulertzeko, ekuazio polinomikoaren ebazpen prozesua urrats indibidualetan banatzea komeni da. Prozesu horretan emandako urrats bakoitza, kantitate "ezagunen" multzoari balio berri bat "eranstearekin" aldera daiteke. Izan ere, ekuazio baten K kantitate "ezagunen" gorputzari balio bat "eranstean" E kantitate "ezagunen" gorputzera pasatzen bagara, jakinekoa da, B_E B_K baino handiagoa edo berdina izango dela, lehenengoak bigarrenak jasotzen zituen erroen arteko erlazio polinomialez gain beste batzuk jaso ditzakeelako, $r(x)$ polinomioaren kasuan, $\mathbb{Q}$ gorputzetik honen $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ hedadurara pasatzerakoan ikusi dugun bezala. Baina horrela jokatuz Galoisen taldean egoteko permutazioei eskatutako baldintzak gogortzen dizkiegu, posible izanik, lehen zeuden polinomioentzat baldintzak betetzea, baina polinomio berrientzat, permutazioren batek huts egitea. Ebazpen prozesuan aurrera eginez, kantitate "ezagunen" gorputzean "eransketak" eginaz, ekuazioaren Galoisen taldea txikituz joango da. Galoisen taldearen erredukzio posible bakoitza, urrats bakoitzean kantitate "ezagunen" gorputzari "erantsitako" balioen propietateei hertsiki lotuta agertzen da.

Bewersdorffek [Bewersdorff 2004] ematen duen adibide bat baliatuko dugu, konputazioak saihestuz, ekuazio polinomiko baten urratsez urratseko erradikalen ebazpenean, kantitate "ezagunen" gorputzari "erantsitako" balio bakoitzak, Galoisen taldearen erredukzioan duen eragina ikusteko. Har dezagun $s(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x - 2 = 0$ ekuazio koartikoa. Cardanoren formula erabilita erradikalen bidez ebazgarria da:

$$x_{1,3} = 1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{3 + \sqrt{2}} \qquad\qquad x_{2,4} = 1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

dira lau erroak. Kalkuluak eginda ikus daiteke 8 permutazio daudela S_4 taldean, $B_{\mathbb{Q}}$ erroen arteko erlazio polinomialen multzoa inbariante uzten dutenak: σ_i izendatuko ditugunak $i = 0, \ldots, 7$ izanik, non, σ_0 identitatea izango den. Honakoak dira permutazio horiek:

	1	2	3	4
σ_0	1	2	3	4
σ_1	3	2	1	4
σ_2	1	4	3	2
σ_3	3	4	1	2
σ_4	2	1	4	3
σ_5	4	1	2	3
σ_6	2	3	4	1
σ_7	4	3	2	1

Zortzi permutazio hauek osatuko dute beraz $Gal(B_{\mathbb{Q}}(s))$. Hortik aurrera ekuazioaren erroek adierazten dute, kantitate "ezagunen" gorputzaren ondoz-ondoko zein hedadura kontsideratu beharko liratekeen, ekuazioa erradikalen bidez ebatzi ahal izateko.

Lehenbiziko urratsean, $\sqrt{2}$ kantitatea "erantsi" behar diogu $\mathbb{Q}$ oinarriko gorputzari: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gorputz hedadura lortuz. Kalkuluak eginda ikusten da, zortzi permutazioetatik lauk baino ez dutela uzten inbariante $B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(s)$: σ_i non $i = 0, \ldots, 3$. Ikusi daitekeenez, kantitate "ezagunen" gorputzari bigarren erro bat eransteak erdira jaisten du, azken honi dagokion $Gal(B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(s))$ Galoisen taldea.

Bigarren urratsean $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ "erantsi" behar diogu, kantitate "ezagunen" gorputzari. Eta hori egitearekin, $B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3+\sqrt{2}})}(s)$ polinomioen multzoaren inbariantzari eusten dieten permutazio bakarrak σ_0 eta σ_2 dira. Berriz ere, beraz, bigarren erro bat eransteak, $Gal(B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3+\sqrt{2}})}(s))$ Galoisen taldearen tamaina erdira jaistea dakar.

Azken urrats batean $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ "eransteak" berriz ere efektu bera izango du eta jadanik, polinomioa ebazgarria litzatekeen kantitate "ezagunen" gorputzari erlazionatutako Galoisen taldea, talde tribiala litzateke, σ_0 identitate permutazioak osatua. Berriz ere bigarren erro bat eransteak, erdira jaisten du dagokion Galoisen taldea.

Galoisek ateratako ondorioak ulertzeko garrantzitsua da, berak egin zuen moduan, taldeen taularen errepresentazioa erabiltzea. Gure aurkezpenean darabilgun multzo teoriazko tresneriarik ezean, taldearen taulak permutazioen arteko erlazioak ulertzea eta manipulatzea ahalbideratzen duelako.

Goiko adibidean, emandako urratsei dagozkien Galoisen taldeen *taulak* adieraziz gero, honelako zerbait izango genuke:

$\circ$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
σ_1	σ_1	σ_0	σ_3	σ_2	σ_6	σ_7	σ_4	σ_5
σ_2	σ_2	σ_3	σ_0	σ_1	σ_5	σ_4	σ_7	σ_6
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0	σ_7	σ_6	σ_5	σ_4
σ_4	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
σ_5	σ_5	σ_4	σ_7	σ_6	σ_2	σ_3	σ_0	σ_1
σ_6	σ_6	σ_7	σ_4	σ_5	σ_1	σ_0	σ_3	σ_2
σ_7	σ_7	σ_6	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0

izango litzateke hasierako $Gal(B_{\mathbb{Q}}(s))$ Galoisen taldeari dagokiona,

$\circ$	σ_0	σ_2	σ_1	σ_3
σ_0	σ_0	σ_2	σ_1	σ_3
σ_2	σ_2	σ_0	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_3	σ_0	σ_2
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	σ_0

izango litzateke $Gal(B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(s))$ Galoisen taldeari dagokiona,

$\circ$	σ_0	σ_2
σ_0	σ_0	σ_2
σ_2	σ_2	σ_0

izango litzateke $Gal(B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3+\sqrt{2}})}(s))$ Galoisen taldeari dagokiona, eta azkenengo urratsean $\{\sigma_0\}$ Galoisen talde tribialera iritsiko ginateke.

Adibide honetan gertatzen zen bezala, pausuz pausu Galoisen taldea identitate permutazioa baino ez duen talde tribialera eramateko aukera ematen duten kasuak, identifikatu zituen Galoisek, erradikalen bidez ebazgarriak ziren ekuazioak karakterizatzen zituztenak. Gaur egungo terminologian, *talde ebazgarriak* izango lirateke hauek. Honela formulatu dezakegu, hainbestean, gutxi gorabehera, Galoisen lanen emaitza nagusia: ekuazio irreduzible bat erradikalen bidez ebazgarria da, zehazki, bere Galoisen taldea urratsez urrats, identitate permutazioa soilik duen Galoisen taldera erreduzitu daitekeenean, urrats bakoitza ordura arteko kantitate "ezagunen" gorputzari m. erro bat "eransteari" edo (behar bezala ordenatutako) taldearen taularen m^2 "karratuko" deskonposaketa bati dagokiolarik, hauetako "karratu" bakoitzak aurreko permutazio kopururaren m-ren bat izanik.

Goiko adibidean, esaterako hiru bigarren erro erantsi ditugu urrats banatan, eta ondorioz urrats bakoitzean 4 "karratutan" banatu da taula, karratu hauetako bakoitzak aurrerokoaren permutazio kopuru erdia duelarik. Ez hori bakarrik ikus daiteke taula karratuetan ezkerrean eta goian geratzen den karratua hurrengo gorputz hedadurari dagokion Galoisen taldearen taula dela. Gainera urratsez urrats Galoisen talde tribialera iritsi garenez, ekuazioa erradikalen bidez ebazgarria dela ondorioztatuko genuke: bagenekiena.

Honenbestez, polinomio baten Galoisen ondoz ondoko taldeen segidaren funtzioan, ekuazio polinomikoaren erradikalen bidezko ebazgarritasuna karakterizatzea lortu zuen Galoisek, praktikan, soluzioen konputorako bide eraginkorrik ez eskaini arren. Galoisen emaitzaren argitan ikusi daiteke, ekuazio polinomikoen erradikalen bidezko ebazgarritasunaren harira, polinomioaren Galoisen taldea zergatik suertatzen den hain erabakiorra: taldeen tauletan antzeman daitezkeen eta erabat izaera konbinatorioa duten kontsiderazioek erakusten dute balizko erradikalen bidezko soluzioa lor daitekeen eta kasu horretan honek zenbagarren erroak izan beharko lituzkeen.

Dedekind, Artin eta Noetherren lanen bidez aurkituko zen, gerora, polinomio baten Galoisen taldeen azterketa konbinatorio hori modu eraginkor batean egin eta antolatzeko modua, aljebra estrukturalaren baitan.

Van der Waerdenek [Van der Waerden 1985] Galoisen lanetan jartzen du aljebra modernoaren (estrukturalistaren, esango genuke guk) abiapuntua. Bere hitzetan, bere aurrekoek ekuazio polinomikoen ebazpenak bilatzen zituzten bitartean, bera izan zen talde eta gorputz estrukturak eta hauen arteko erlazio estuak aztertzen lehenbizikoa. Ekuazio polinomiko batek erradikalen bidezko ebazpenik duten jakiteko honen Galoisen taldearen estruktura aztertu behar zela erakutsi zuen. Corryren arabera ([Corry 1996]), ordea, Galoisek, estrukturak aurkitu eta hauek problema jakinak ebazteko erabiltzeko modua agerian jarri zuela onartzen badu ere, ez dator Van der Waerdenekin bat matematika estrukturalista Galoisengan jartzean. Honen arabera, gutxi gorabehera mende bat iraungo zuen trantsizio prozesu bat eman zen, Galoisen aurkikuntzetan oinarrituta aljebraren izaera guztiz eraldatu bitartean. Ekuazioak ebaztera zuzendutako alor bat zena, Galoisenak moduko estruktura eta metodo estrukturalak ekuazioen ebazpenean aplikatzetik, aplikazioetatik harago, axiomatikoki definitutako estruktura aljebraikoak, beraiek, eta hauen arteko erlazioak sistematikoki aztertzera zuzendutako alorra izatera pasa zen aljebra mende horretan. Eta, gauzak nola diren, Corry-k Van der Waerden beraren [Van der Waerden 1930-1931] lan esanguratsua jartzen du aljebraren izaera aldaketaren lehenbiziko erakusle eta mugarri nagusi bezala.

2.1.2 Van der Waerdenen *Moderne Algebra*

Corryk dioen bezala [Corry 1996] XX. mendeko matematikaren eta bereziki aljebraren izaera estrukturalistak, hein handi batean, jatorria Galoisen lanetan badu ere, ez da aurretik zegoenarekiko ondo desberdindu daitekeen jakintza esparru gisa aurkeztuko [Van der Waerden 1930-1931] argitaratu arte. Beraz, lehenbiziko estrukturak (taldeak eta gorputzak, konkretuki) eta metodo estrukturalak Galoisen lanetan aurki baditzakegu ere, *estrukturalismo matematikoa* Van der Waerdenek ordezkatzen duen aljebra abstraktu edo modernoaren[12] baitan heldu eta aurkeztu zela esan dezakegu. Prozesu hau Alemanian eman zen nagusiki 1840 eta 1940 bitartean

[12] *Aljebra estrukturalista* azken finean.

([Dieudonne 1979]).

XVIII. mendean ekuazio polinamikoen teoriaz arduratzen zen matematikaren alorra bezala defini zitekeen aljebra, ekuazio konkretuak ebazteko erabiltzen ziren teknika anitzak, nahiz polinomio orokorren koefiziente eta erroen arteko erlazioen azterketak tartean zirelarik. XIX. mendean zehar, interesguneak hauexek izaten jarraitu zuten, nahiz eta berriak ere agertu ziren (matrize eta determinateak, esaterako). Zenbakien teoria, bestalde, zatigarritasunaren, kongruentzien eta faktorizazio problemak aztertzen zituen matematikaren esparru bezala ikusi zitekeen. Atomizazio honen aurrean, sortzen ari zen aljebra estruktural berriak problema hauetako asko marko komun batean tratatzeko formulazio orokorragoak eta ikuspegi berritzaileak garatuko zituen. Ikuspegi berri honek poliki-poliki ikerketa aljebraikoen helburuak, tresneria aljebraikoa, erantzun beharreko galdera interesgarrien fokua,... erabat aldatu zituen. Transformazioa erabatekoa izan zen. Aljebra zaharrak eta berriak izen bera partekatzearen zilegitasuna zalantzan jartzeraino.

Izugarrizko arrakasta izan zuen [Van der Waerden 1930-1931]-ek argitaratu bezain laister. Hizkuntza askotara itzuli zen eta mundu guztiko unibertsitateetan ohiko aljebrako eskuliburua bilakatu zen ([Mac Lane 1997]). Estruktura aljebraikoen zabalkundean garrantzi handia izan zuen, horrenbestez. Eta Mac Lanek onartzen duen moduan, Van der Waerdenen ekarpen nagusi bezala ulertu behar dugu bere testuliburua antolatzeko aukeratutako bidea, aljebra estrukturalistarena hain zuzen ere, garai hartan ez baitzen aljebraren ikuspegi hori nagusitzen zena[13]. Aljebraren ulergarritasun eta antolaketa mailan kokatu beharreko ekarpena da hortaz berea, edo nahi baldin bada, aljebraren barne oinarrien inguruko ekarpena.

Liburuaren edukiei eta antolaketari erreparatuz, Van der Waerdenen aurkezpe-

---

[13]Ikusi [Corry 1996] liburuko lehenbiziko kapituluan egiten den Van der Waerdenena eta garaiko beste aljebrako testuliburu nagusi batzuren arteko konparaketa.

nean, eremu aljebraiko desberdinak definitu eta hauetako bakoitzaren estruktura aurkezten dela ikusi daiteke. Eremu aljebraikoak definitzeko, gaur ohikoak bilakatu diren bi modu erabiltzen ditu. Batetik multzo ez-hutsak abstraktuki definitutako eragiketez (bat edo bi) hornituz (talde, eraztun, bektore espazio, etabarrekin egiten duen moduan). Beste batzuetan ordea, jadanik existitzen den eremu bat erabiltzen du honen gainean berri bat definitzeko, ondo zehaztutako modu batez (hala nola, integritate eremuen zatikien gorputzak, eraztunen gaineko polinomioen eraztunak, gorputzen hedadurak etab. definitzeko).

Eremu aljebraikoen estruktura aurkezterakoan jarraitzen duen bidea ez da eremuak definitzerakoan darabilena bezain argia. Izan ere, liburuan zehar estruktura aljebraiko nozioa erabiltzen bada ere, hau modu informal batean egiten denez, ez delako eremu desberdinen estruktura zerk osatzen duen esplizituki adierazteko ahaleginik. Baina, formalizatzen ez duen metakontzeptua bada ere, ezin ukatuko zaio Van der Waerdeni, eremu desberdinen azterketa sistematikoki garatu izana, eremu guztietan orden berean lantzen dituen kontzeptu eta galdera orokorretaz baliatuta. Kontzeptu errekurrente hauen artean isomorfismoak, homomorfismoak, hondar klaseak, biderkadura zuzenak, etab. aurki daitezke, guztiak ere multzo teoriazko deitu ditzakegunak. Ez dago hala ere, kontzeptu orokor hauek hasieratik eskura jartzeko, multzo teoriari buruzko hasierako kapitulurik edo antzekorik, gaur egungo zenbait testuliburutan, aurkezpenaren egitura argitu nahian egin ohi den moduan. Kasu bakoitzean, kasuan kasuko berezitasunekin definituz.

Esaterako, talde isomorfismoak, eraztun isomorfismoak eta gorputz isomorfismoak banan banan definitu ostean, kasu bakoitzean, bi eremu isomorfoak izatearen erlazioa, baliokidetasun erlazio bat dela frogatzen du Van der Waerdenek. Estruktura isomorfoak, funtsean, berdinak direneko kontzeptu orokorra[14], aldiz, esplizituki formulatu gabe dator. Eremu aljebraiko guztien azterketan modu errekurrentean era-

[14] *Metakontzeptu* deitu diogu.

bilitako eta formalizatu gabeko metakontzeptu hauek dira, azken batean, Van der Waerdenen aljebraren ikuspegi estrukturala, inplizituki karakterizatzen duen, hierarkia kontzeptuala eraikitzeko balio dutenak.

Aipatu beharrekoa da baita ere, aljebraren ikuspegiaren aldaketaren norainokoaren adierazgarri den hurrengo puntua. Van der Waerdenen liburuan, aljebra zaharraren gunea osatzen zuen ekuazio aljebraikoen ebazpenari lotutako kuestioak, lehenbiziko aldiz bigarren plano batera pasatzen dira. Hain zuzen ere, Galoisen teoria "estrukturalari" eskainitako kapituluko atal labur batzuetara mugatzen da guztia. Modu berean, zenbaki klase desberdinen multzoek eta hauen ezaugarriek, garai batean izandako garrantzia erabat desagertzen da, estruktura aljebraiko orokorren adibide soil izatera pasatuz, eta beti ere, hauen ezaugarri soilik aljebraikoetara mugatuz, analitiko edo topologikoak izan daitezkeen eta garai batean kontutan hartzen zirenak, baztertuz. Objektu klasikoen ezaugarri jakin batzuk baino ez kontuan hartzeko joera hau da, estruktura aljebraikoen azterketak ekarritako beste berritasun garrantzitsu bat.

Van der Waerdenen estrukturalismoa, eremuz eremu errepikatzen diren kontzeptuetan gauzatzen diren esplizituki definitu gabeko metakontzeptuetan aurkitu daiteke. Baina ez hor bakarrik. Eremuz eremu errepikatzen diren problemen izaera analogoak ere ematen baitu eremu aljebraiko desberdinen estrukturaltasunaren berri. Esaterako, faktorizazioa eta honek eremu batean duen portaera aztertzea kuestio zentrala da estrukturen ikerketan. Zenbaki osoen eraztunean zenbaki lehenek jokatzen duten paperaren antzekoa beteko duten azpieremu klase bereziak bilatzen dira, eremuaren estruktura argitzeko, eremu horren eta bere azpieremu "lehenen" arteko erlazioa zein den erantzun nahian. Horrela bada, "lehenen faktorizazioarena" eremu desberdinetan kontsideratzen den kuestioa da. Talde teorian talde sinpleek, eraztunetan ideal lehenek eta polinomioen eraztunetan polinomio irreduzibleek jokatzen dute "elementu lehenen" papera.

Kuestio honi lotuta agertzen zaigu, baita ere, eremu baten eta bere azpieremuen sistemaren arteko erlazioa argitzearena. Egia esan, aurrez aipatutako lehenen faktorizazioaren kuestioa kuestio zabalago honen parte bat baino ez da. Aljebraren ikuspegi estrukturalistarentzat, eremu baten eta bere azpieremuen arteko erlazioa argitzeak duen garrantziaren erakuslea da, Birkhoffek eta Orek hogeita hamargarren hamarkadan, nozio hau baliatuz[15], eta modu independentean, "estruktura aljebraiko" kontzeptua formalizatzeko egindako ahalegina.

Ohiko beste problema bat, arestian aipaturikoa, emandako eremu aljebraiko baten gainean modu estandarrean eraikitako eremu aljebraikoei (integritate eremuen zatikien gorputzak etab.) lotuta agertzen zaigu. Jatorrizko eremuaren propietateak eremu berrian zenbateraino kontserbatzen diren ikustean datza arazoa. Esaterako, eraztun bat integritate eremua baldin bada, honen gaineko polinomioen eraztunaz beste horrenbeste esan dezakegun. Edo eraztun batean ideal oro finituki sortua bada, eraztun horren zatidura eraztunetan, edo eraztun horren gaineko polinomioen eraztunetan ere hala izango den. Jatorrizko eremuaren propietateen artetik, honen gaineko eraikuntza klase bakoitzaren kasuan, heredatzen diren propietateak zeintzuk diren argitzen saiatzea izan ohi da antzerako beste ohiko kuestio bat.

Eremu aljebraiko batzuetan posible izan ohi da, datu kopuru murritz batetik, eremuaren estruktura isomorfismoz gaindi determinatzea. Hala gertatzen da, esaterako, bektore espazioen kasuan, eskalarren gorputza eta dimentsioa finkatuta. Van der Waerdenek, orain arte zerrendatutako problemekin egiten duen bezala, eremu aljebraiko bakoitzaren kasuan era honetako emaitzarik lortzea posible den ikusten ere ahalegintzen da.

[15] Eremu aljebraiko baten azpieremu berezi batzuk osatzen zuten erretikuloa aztertzean oinarritzen ziren ahaleginok. Ikusi [Birkhoff 1935], [Ore 1935] eta [Ore 1936].

Eremu aljebraiko desberdinetan errepikatzen dituen kontzeptu eta problema orokor hauek determinatzen dute inplizituki Van der Waerdenen aljebraren estrukturalismoaren izaera, orain arte aipatu ez dugun metodo axiomatikoaren erabilerarekin batera. Metodo axiomatikoaren erabilera, nola ez, aipatutako helburuak lortzeko darabil Van der Waerdenek. Metodo axiomatikoak aljebraren izaera estrukturalari dagozkion ezaugarriak modurik sinpleenean garatzeko aukera ematen du. Baina ez da ulertu behar Van der Waerdenen kasuan ematen den aljebraren ikuspegiaren aldaketa metodo axiomatikoari zor zaionik. Galoisen lanek erakutsitakoa bezalako estrukturen errelebantziak gidatau zuen, batez ere, aldaketa hori, metodo eta kontzeptu berriak funtsezkoagoak eta sakonagoak zirela erakutsi baitzuten. Metodo axiomatikoak, batetik, eremu aljebraiko desberdinetan agertutako problema homologoak, ikuspuntu berberetik lantzeko aukera eman zuen, Van der Waerdenen aurkezpenaren batasuna azpimarratuz.

2.2 Estrukturalismoa matematikan

2.2.1 Bourbakiren *Éléments de mathématique*

1930 urte ingururako argi geratu zen ikerketa matematikoan zebiltzanentzat emaitza berrien inbentarioa egin eta hauek ordenatzeko beharra, azken 40 urteetan izandako aurrerapenen zenbatekoa ikusita. Tartean ziren Cantor eta Zermeloren multzo teoria, taldeen errepresentazio lineal eta aljebra trukakorra, topologia orokorra eta aljebraikoa, Lebesgueren integrala, ekuazio integralak, teoria espektrala eta Hilberten espazioen teoria, Lieren taldeak, etab. [Dieudonne 1982].

Bourbakiren garairako matematika, geometria, aritmetika, aljebra eta analisian banatzean zetzan sailkapen tradizionala matematikaren izaera sakonari egokitzen ez zitzaion ustea gero eta zabalduagoa zegoen. Sailkapen tradizional hau, disziplina matematikoak hauetan lantzen ziren objektuen arabera bereiztean oinarritzen zen. Horrela bada, aritmetika zenbakien zientzia, geometria objektu espazialen zientzia, aljebra ekuazioen zientzia eta analisia funtzioen zientzia izanik. Bourbakik bere gain hartuko zuen matematikaren berrantolaketa erraldoi hori aurrera eramateko proiektua.

Nicolas Bourbaki 1930. hamarkadako hasierako urteetan sortutako matematikari frantziar gazte en talde batek kolektiboki erabili zuen gaitzizena da[16]. I. mundu gerlaren ostean Frantziako unibertsitateetan erakusten zen matematika eta konkretuki, analisia[17], zaharkitua eta iluna zela pentsatuta, taldearen hasierako asmoa nahiko apala zen: analisirako testuliburu moderno bat idaztea, gai klasikoak Van der Waerdenek erakutsitako ikuspegi modernoago batetik landuta, garaiko testuliburu estandarrak ordezkatzeko.

Konturatu ere egin gabe, ordea, XX. mendeko bigarren erdiko matematika itxuraldatuko zuen urte luzeetako lan erraldoiari eman zioten hasiera: *Éléments de mathématique* [Bourbaki 1939-]. 1939an argitaratu zuten lanaren lehenbiziko bolumena, eta 1998an, oraingoz, azkena. Gaur egun, guztira 7000 orritik gora batzen dituzten 10 liburuk osatzen dute lana, liburu bakoitza bolumen anitzekoa delarik. Multzo teoriari buruzkoa da lehenbiziko liburua, aljebrari buruzkoa bigarrena, topologia orokorrari buruzkoa hirugarrena, aldagai erreal bateko funtzioei buruzkoa laugarrena, bektore espazio topologikoei buruzkoa bosgarrena, integrazioari buruzkoa seigarrena, aljebra trukakorrari buruzkoa zazpigarrena, barietate diferentziagarri

[16]Matematikari asko izan dira sortu zenetik momenturen batean Bourbaki “taldearen” partaide izan direnak. Bourbakiren urte emankorrenetan, Armand Borelen arabera [Borel 1998], proiektuaren zama nagusia eraman zutenak aipatuko ditugu guk hemen: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsartre, Jean Dieudonné eta André Weil. Gerora Laurent Schwartz, Jean-Pierre Serre, Alexander Grothendieck edo Serge Lang bezalako matematikari garrantzitsuak ere pasako ziren, “pisu” desberdinarekin bada ere.

[17]Hori zen Frantziako unibertsitateetan, tradizioz, pisu handiena izan ohi zuen alorra. Gainera, Alemanian garatzen ari zen aljebra berriaren zantzu handiegirik ez zen antzemateko Frantzian garai hartan.

eta analitikoei buruzkoa zortzigarrena, Lieren talde eta aljebrei buruzkoa bederatzigarrena eta teoria espektralari buruzkoa hamargarrena [Mashaal 2002].

Hutsetik hasita matematika berrantolatzeko zeregina bere egin zuen Bourbakik. Gainera horretarako eredutzat hartutako [Van der Waerden 1930-1931] baino zorrotzago jokatu nahi izan zuen, hark egin bezala, besterik gabe nolabaiteko multzo teoria "intuitibo" batekin hasi beharrean, garai hartarako Zermelok, Fraenkelek eta Skolemek, Dedekinden eta Cantorren lana sistematizatuz sortutako multzo teorian fijatu ziren, hemendik beraien asmoetarako behar zituztenak bakarrik hartuz, matematikarien eguneroko praktikatik hurbilen zegoen sistema logiko bezala, beren teoriako oinarriak finkatzeko. Multzoen teoria "naïve" bat eman zuten, multzoak manipulatzeko eta emandako multzoetatik berriak eraikitzeko erregelak eta terminologia finkatuz. Multzo ordenatuen teoria labur azalduz, eta kardinal edo ordinalen inguruko inongo aipamenik egin gabe, Zorn-en lema baliatu zuten lan horretarako. Ikusi daitekeenez, Cantorren lanaren bertsio oso laburtu bat, nahikoa izan zitzaien eraikuntza matematikoa oinarritzeko. Hein handi batean, matematika arrunta, multzo teoria "naïve" horretan eraiki zitekeela ikusi izan da harrez gero.

Bourbakiren estruktura matematikoak lehen liburuan deskribatutako multzo teorian oinarritutako sistema axiomatiko interdependenteek osatzen zuten. Enbor bakarrari lotutako adar desberdinez osatutako zuhaitzaren gisara. Multzo teoriazko sistema axiomatiko interdependente hauengan lortzen zuen Bourbakik zuhaitz matematikoaren batasuna erakustea. Zuhaitzaren metafora baino, eraikuntzarena zerabilen Bourbakik.

1948an argitaratu zuen Bourbakik bere matematikaren ikuspegia eta antolaketa azaltzen duen*L'architecture des mathématiques* izeneko artikulua [Bourbaki 1948] goian aipatutako printzipio ordenatzaileak esplizitu eginez. Bourbaki taldearen manifestutzat hartu izan da artikulu hau. Aurrerago Hilbertek bezala [Corry 1996] matematikaren batasunaren kuestioa landu zuen, azken urteetan disziplinak ezagututako dibertsifikazio eta ugalketa ikusita, zerikusi gutxi zuten adarretan bereizteko arriskua egon zitekeela pentsatuta. Bere tesia zen matematika batasun handiko disziplina zela, azaleko iruditik urrun, eta batasun hori agerian jarriko zuena metodo axiomatikoaren erabilera sistematikoa zela. 1.2.1 atalean ikusi dugun moduan, Hilbertek [Hilbert 1899] lanean ederki asko erakutsi zuen zertarako gauza zen metodo axiomatikoa. Hilbert, beraren, hitzetan teoria matematiko baten aurkezpenean metodo genetikoak izan dezakeen balio pedagogikoaren ondoan, “metodo axiomatikoak, gure ezagutzaren edukien aurkezpen definitibo bat eta berme logiko osoa eskaintzearen abantailak”[18] ditu. Bourbaki Hilbert baino harago zihoan, hala ere, Van der Waerdenek erakutsi bezala, metodo axiomatikoa, bereziki, estrukturen azterketa sistematikoak egiteko baliatu baitzuen. Van der Waerdenek aljebran estruktura aljebraikoak erabiliz egindakoaren antzerako zerbait egin zuen Bourbakik matematikaren beste esparru batzuetan, estruktura aljebraikoak orokortuz. Bourbakiren ahalegina, matematikaren aljebraizazio ahalegin bezala ere ikusi izan dute[19].

Van der Waerdenek estrukturak hauen adibide konkretuetan agertzen zaizkigula esaten genuen aurreko atalean, eta estrukturalismo deitzen genuena, estruktura desberdinen teoriak garatzerakoan, errekurrenteak ziren eraikuntza eta problemetan inplizituki jasoa zetorrela. Baina Van der Waerdenek estrukturei buruz hitz egiten zuenean, modu intuitibo eta, ondorioz, lauso batean egiten zuen. Ez zen estrukturaren kontzeptua formalizatzen ahalegindu. Bourbakiren kasuan, bide bikoitz bat jarraitzen da, estruktura kontzeptuari dagokionean. Batetik, maila intuitiboan darabilena eta bere lanean errelebanteena suertatuko dena. Hau da hain zuzen ere [Bourbaki 1948]-n, bere matematikaren ikuspegia antolatzeko darabilen kontzeptua.

Askoz arrakasta txikiagoarekin bada ere, ez dugu ahaztu behar, Bourbakik estruk-

[18] Ikusi [Hilbert 1900, 184. or.], [Corry 1996, 164. or.]-n aipatua.

[19] Scwhartzek, esaterako, analisiaren aljebraizazioaz hitz egiten du [Schwartz 1997]-n.

tura kontzeptua formalizatzeko ahalegina egin zuela, multzo teoriari buruzko lehenbiziko liburuan. [Corry 1996]-n luze eta zabal aztertzen da kontzeptu hau Bourbakiren estrukturalismoan lukeen garrantzia ebaluatu nahian. Ondorioa oso argia da: Bourbakik huts egin zuen estrukturaren kontzeptu abstraktua formalizatzerakoan. Hala ere, beren lanerako ez zuen eraginik izan hutsegite honek, lehenbiziko liburuan definitutako kontzeptu horrekiko erabat independentea baita ondorengo teorien garapena. Dieudonnék eta beste Bourbakitar batzuk onartuko dute estrukturen teoria orokorrik egin ez izana. Are gehiago, matematikan izandako errelebantziari begiratuta, estrukturaren kontzeptu orokorra jasoko duen kategorien teoriaren[20] nagusitasuna ukaezina zela esan zuten [Dieudonne 1970].

[Corry 1996]-k ondorioztatzen duen moduan, formalizatu gabeko estrukturaren ideia da garrantzitsuena Bourbakirengan. Azken batean, Galoisen garaitik ezagutzen ziren estruktura aljebraikoak orokortzetik ateratzen zen. [Bourbaki 1948]-n azaltzen den moduan, ezaugarri jakinik gabeko multzo bat emanda, estruktura bat definitzeko, multzoko elementuen artean erlazio bat edo batzuk ezartzen dira, eta hauek bete beharreko propietate edo axiomen (estrukturaren axiomak) zerrenda bat ematen da. Bukatzeko estruktura baten teoria axiomatikoa egitea, estruktura horren axiometatik, eta soilik horietatik, ondorio logikoak deduzitzean datza, inplikatutako objektuek izan dezaketen beste edozein propietate, bereziki hauen "izaerari" buruzkoak, baztertuz. Estrukturen teoria formal eraginkorrik ezean, Van der Waerdenaren antza hartzen du. Estruktura guztietan teoria garatzeko moduan, egiten dituen konstrukzioetan (estrukturak, azpiestrukturak, estrukturen biderkadura kartesiarrak, zatidura estrukturak, estrukturen isomorfismoak), erantzun nahi dituen problemetan inplizituki jasota dator Bourbakiren estrukturalismoaren beste partea, parte metodologikoa.

[20][Mac Lane 1996b]-k ere alderatzen du Bourbakiren estruktura formala, kategorien teoriarekin. 3. kapituluko 1. atalean hitz egingo dugu kategorien teoriari buruz.

Bourbakik duen matematikaren ikuspegia estrukturen hierarkiaren printzipio ordenatzailean oinarritzen da. Hierarkia honen oinarrian hiru *ama-estruktura* kokatzen ditu: estruktura aljebraikoen ama-estruktura, estruktura topologikoen ama-estruktura eta orden estrukturen ama-estruktura. Multzoen gainean estrukturak definitzeko ezartzen diren erlazioen izaeraren arabera sailkatzen dira hiru klaseok. Estruktura aljebraikoetan, esaterako, multzoko elementuen arteko erlazioak, "konposaketa legeak" izan ohi dira, hau da, multzoko edozein bi elementuri hirugarren bat modu bakarrean erlazionatzen dion erregela bat. Era honetakoak dira Van der Waerdenek deskribatutako taldeak, eraztunak, gorputzak,... Orden estrukturetan, elementuen artean definitutako erlazioak, orden erlazioak[21] izan ohi dira, hau da, erlazio bitar erreflexibo, antisimetriko eta trantsitiboak. Zenbaki multzoak ohiko orden erlazioekin, multzo baten parteen multzoa partekotasun erlazioarekin edo zenbaki osoen multzoa hauen arteko zatigarritasun erlazioarekin, esaterako, orden estrukturak direla ikusi daiteke. Azkenik, estruktura topologikoetan, multzoko elementuen arteko erlazioak, espazioaren pertzepziotik datorkigun "hurbiltasunaren" edo "ingurunearen" nozioa kodifikatzeko balio duten azpimultzo irekien bildumak finkatuz ezartzen dira[22].

Bada aspektu bat, sailkapen honetan arreta erakartzen duena. Izan ere, Bourbakik, hasiera batean, hiru ama-estrukturak parez-pare jartzen baditu ere, hauek matematikan duten garrantzia eta aniztasunari dagokienean oso desberdinak baitira. Estruktura aljebraikoetan elementuen arteko erlazioak "konposaketa legeak izatea" baino ez eskatzeak, "askatasun gradu" asko uzten dituen bitartean, orden estrukturetan, edozein kasutan bete beharreko axioma batzuek ezarten zaizkio erlazioari, kasu honetan, aipatutako "askatasun graduak" askoz gutxiago izanik. Antzerako zerbait gertatzen da estruktura topologikoekin.

[21] Orden partzialak.

[22] Oso laburra da kasu honetan Bourbaki, eta ez du erakusten, aurrekoetan ez bezala, "multzoen arteko erlazioak" zein zentzutan ulertu beharko litzatekeen.

Hauek izango lirateke estrukturarik sinpleenak Bourbakiren hierarkian, eta estruktura konplexuagoen jatorrian egongo liratekeenak. Sinpleenak izatearekin batera, estruktura hauek orokorrenak ere badira. Azken batean, estrukturaren axioma kopurua txikiagoa den heinean, sinpleagoa izatea dakar, eta aldi berean, baita orokorragoa izatea ere. Eta alderantziz estruktura konplexuagoek, axioma gehiago dituzte, eta beraz konkretuagoak izan ohi dira.

Bourbakiren deskribapenarekin jarraituz, ordea, ama-estrukturak konbinatzetik estruktura berriak lor daitezke. Aljebra topologikoa, adibidez, aljebra batetako eragiketak topologia jakinetako funtzio jarraituak izatea eskatzen duten estrukturekin, edo alderantziz, topologia aljebraikoa, espazio topologiko baten gainean definitutako objektuen arteko eragiketak eta aljebrak definituz. Konbinazioak aberastuz eta konplikatuz doazen heinean, sarritan estruktura kategorikoekin topo egingo da, kasu honetan isomorfismoz gaindi, bakarra kontsidera daitekeen estruktura baten azterketa zelaiak izango dira hauek. Hor kokatzen ditu Bourbakik analisi erreala edo konplexua, geometria diferentziala, edo zenbakien teoria klasikoa. Bide batez, zelai hauek historikoki matematikaren barruan izan duten errelebantzia kolokan jartzea lortzen da honela: estrukturen bidez antolatutako matematikaren taxonomia berrian leku marginal bat dagokie. Hierarkian betetzen zuten lekutik ondorioztatzen zen errelebantzia eman zien Bourbakik matematikako zelai desberdinei, sarritan historia eta tradizioarekin hautsiz. Matematikaren izaera dinamikoa onartuta, euren asmoa ez zen matematikaren argazki definitibo bat ematea. Estrukturen hierarkiaren ideia mantenduz deskribatutako panorama etengabe aldatzen ari zela onartuz, eta denborarekin antolaketa berriak eta hobeak lortuko zirela uste zuten, egoera definitibo baten asmorik bilatu gabe. Hori bai estrukturen hierarkian printzipio ordenatzaile garrantzitsua aurkitu zuela uste zuen, arkitekturaren metaforak laburtzen zuena:

> Horrela, [...] matematikaren barne bizitzaz hobeto jabetu gaitezke, bai bere batasunaz eta bai bere aniztasunaz. Hiri handi bat bezalakoa da, etengabe garatzen ari diren kanpoko auzo eta aldiriak, modu kaotiko xamarrean, in-

> guruetako lurretara zabalduz, erdigunea aldizka berreraikitzen den bitartean, gero eta egitasmo argiago bati eta gero eta antolaketa dotoreago bati jarraituz, kalezulozko laberintodun auzo zaharrak eraitsiz, periferiarantz, gero eta etorbide zuzenagoak, zabalagoak eta erosoagoak hedatzeko.[23]

Dieudonnék gerora aitortuko duenez [Dieudonne 1970] Bourbakiren asmoa ez zen lan entziklopediko bat egitea, non momentuko ezagutza osoa jasoko zen. Tresna kaxa bat bailitzan pentsatu zuten Bourbakitarrek beren lana. Hau da, matematikariek eguneroko ikerketa lanean, edozein esparrutan zebiltzalarik ere behar izango zituzten emaitzak jasoko zituen bilduma ordenatu bat. Definizio eta teoremarik garrantzitsuenak leku bakarrean jasoko zituen erreferentziazko lan bat, aplikazio eremurik handiena izateko eta lekuan lekuko matematikariek egokitzapen lan handiegirik egin gabe erabili ahal izateko behar bezain era orokorrean aurkeztuak. Adibidez, analisi funtzionalean egin zituzten lanetan Hilbert, Riesz, Helly eta beste batzuek "aukeraketa printzipio" deitu zuten asmakizun bat erabili behar izan zuten, aurrez bakoitzak bere interesgunera egokitutako froga bat eman behar izan zuelarik. Baina "printzipio" hauek guztiak, Banachen edozein espaziotan unitate bola itxiak, beren dualean, ahulki tinkoak direla dioen teoremaren kasu partikularrak baino ez dira. Azken hau da beraz Bourbakin aurkituko dugun teorema, eta ez kasu partikular guztiak.

Behin baino gehiagotan aurki daiteke Bourbakin parte hartu izan zutenen hitzetan, Bourbakik matematikan egindako lanaren eta Von Linneo naturalista suediarrak XVIII. mendean izaki bizidunen sailkapenari dagokionean eginiko ekarpen garrantzitsuaren arteko alderaketa. Hona, adibidez, Schwartzek bere autobiografian dioena, hitzez-hitz:

[23]Thus, [...] we can become better aware of the internal life of mathematics, of its unity as well as of its diversity. It is like a big city, whose outlying districts and suburbs encroach incessantly, and in a somewhat chaotic manner, on the surrounding country, while the center is rebult from time to time, each time in accordance with a more clearly conceived plan and a more majestic order, tearing down the old sections with their labyrinths of alleys, and projecting towards the periphery new avenues, more direct, broader and more comodious. [Bourbaki 1948]. Guk ingelesezko itzulpenetik (1950) hartu dugu: 230. or.

Bourbakiren matematikaren sailkapena Linnaeusek 1758an, izaki bizidun guztiak, animaliak nahiz landareak, sailkatu zitueneko bere *Systema naturae*-n sarrarazitako iraultza handiarekin pareka daiteke. Adarrak, klaseak, ordenak, familiak, generoak, espezieak eta subespezieak, edozein izaki bizidun edozein mailatan situatzea posible egiten zuenak, aurrez animalia eta landereen artean nagusi zen kaosa ordezkatu zuen. Ornodunen azpierreinuak bost klase ditu: ugaztunak, hegaztiak, narraztiak, batrazioak eta arrainak. Lehenago baleak arrainak zirela uste zen uretan bizi zirelako. Baina beren barne egiturak ugaztun egiten du balea, ez arrain. Baleen azterketa honetan oinarritzen da. Baleek ez dute ilerik, beste ugaztun batzuk duten moduan, baina arrainek ezkatak dituzte. Ugaztunen hezurdurek hogeita hamairu orno dauzkate, arrainenek ez bezala. Baleek birikak dituzte eta airea arnasten dute, arrainek brankiak dituzte eta ura arnasten dute. Arrainek arraultzak jartzen dituzte eta ez dituzte beren txikiak zaintzen – bestera, sarritan irentsi egiten dituzte – bale emeek beren txikiak beraiekin daramatzate eta zaindu egiten dituzte. Linnaeusen sailkapenak baleak ornodunen azpierreinuan, ugaztunen klasean eta zetazeoen ordenean kokatzen ditu. Zetazeoak familia desberdinetan banatuta daude; baleak genero jakin batekoak dira, eta genero hau bale espezie desberniten banatua dago. *Systema naturae* 1758an agertu zen lehen aldiz – hamargarren ediziorako, baleak ugaztunen artean sailkatuak aurki ditzakegu, 1753an Daubentonek oraindik arrain deitzen zituen bitartean. Antzera, saguzahar bat ez da hegazti bat, ugaztun intsektu-jale bat baizik. Sailkapena nahiko erraza gertatzen da. Adibidez lehoia ornodunen azpierreinukoa da, ugaztunen klasekoa, haragijaleen ordenekoa , felinoen familiakoa, *Panthera* generokoa, eta *Panthera leo* espeziekoa. Tigreek sailkapen bera daukate generora arte, baina beren espeziea *Panthera tigris* deitzen da. Katuak *Felis felis* dira, pumak *Felis puma*. Txakurrek ornodun, ugaztun eta haragijale bezala sailkapena partekatzen dute, baina baina familia kaninokoak dira, beren generoa*Canis* da eta espeziea *Canis domesticus*, otsoak *Canis lupus* espeziekoak diren bitartean. Bourbaki da matematikako Linnaeus.[24]

Aurreko testuan ikusten den bezala, Linnaeusen eskutik naturalistek izaki bizidunen sailkapenari buruzko ideiak aldatu zituzten. Azaleko antzekotasunak hartzen zituzten kontutan hasieran, baina gero konturatu ziren sailkapen arrazional bat emateko beharrezkoa zela ezaugarri anatomiko eta fisiologiko sakonagoetara, ezaugarri estrukturaletara jotzea. Horrela baino ez ziren izaki bizidunen familiaren sakoneko batasunaz jabetu. Matematikariak ere modu beretsuan jabetuko ziren, Bourbakitarren ustez, matematikaren sakoneko batasunaz, parte desberdinen ageriko desberdintasunak desberdintasun.

Honenbestez, esan dezakegu Bourbakiren lana ez zela ikerketa lana, berrantolaketa lana baino. Multzo teoriazko estrukturen hierarkia printzipio ordenatzailetzat harturik, eginiko teoria matematikoen garapen axiomatikoa da Bourbakiren *Éléments de mathématique*. Agian, estruktura matematikoaren definizio zehatz egoki bat erabili izanak matematikaren berfundazio horri lagundu ziezaiokeen, agian kategorien

[24]Bourbaki's classification of mathematics can be compared to the inmense revolution introduced by Linnæus in his *Systema naturae* in 1758, in which he classified all animal and vegetable living organisms. Branches, classes, orders, families, genera, species, subespecies, which make it possible to situate a given organism at every degree, replaced the chaos which reigned amongst animals and vegetables before. The subkingdom of vertebrates contains five classes: mammals, birds, reptiles, batrachians and fish. Previously, whales were thought to be fish because they lived in water. but its internal structure makes the whale into a mammal, not a fish. The study of whales is based on this fact. Whales do not have fur, like other mammals, but fish have scales. the skeletons of mammals have thirty-three vertebrae, unlike those of fish. Whales have lungs and breathe air, fish have gills and breathe water. fish lay eggs and do not care for their young – indeed, they often devour it – female whales carry their young and nurse them. the classification of Linnæus situates whales in the subkingdom of vertebrates, in the class of mammals, in the order of cetaceans. Cetaceans are divided into several families; whales correspond to a particular genus, this genus contains several species of whales. *Systema naturae* first appeared in 1758 – by just the tenth edition, whales are found classified as mammals, whereas in 1753, Daubenton still called them fish. Similarly, a bat is not a bird, but an insect-eating mammal. Classification becomes quite easy. For instance the lion belongs to the subkingdom of vertebrates, the class of mammals, the order of carnivores, the family of felines, the genus emphPanthera, the species *Panthera leo*. Tigers have the same classification right down to the genus, but their species is called *Panthera tigris*. Cats are *Felis felis*, pumas are *Felis puma*. Dogs share the classification as vertebrates, mammals and carnivores, but they belong to the canine family, their genus is *Canis* and their species is *Canis domesticus*, whereas wolves belong to the species *Canis lupus*. Bourbaki is the Linnæus of mathematics. [Schwartz 1997]. Guk ingelesezko itzulpenetik (2001) hartu dugu: 150-151. or.

teoria jaso eta esplotatu izanak[25].

Mac Lanek ondo adierazi zuen bezala [Mac Lane 1996b], ama-estruktura eta hauen konbinaketan oinarritutako matematikaren antolaketa matematikaren adar nagusi batzutan esanguratsua eta sakona suertatu bazen ere, ez zen hala gertatu beste zati garrantzitsu batzutan. Estrukturen bidez ondo deskribatzen diren matematikaren adarretan egindako lana da Bourbakiren ekarpenik handiena: aljebran, topologian, analisi abstraktuan. Baina matematikaren batasuna erakusteko bidean, adar esanguratsu asko geratu ziren, matematika purua deitzen den horren barruan ere beren obratik kanpora[26]. Bourbakiren erako estrukturetara eta garapen axiomatikoetara hain ondo moldatzen ez ziren zelaiak ere bazeuden. Esaterako, aldagai konplexu bateko analisia bezalako matematikaren esparru garrantzitsu bat, Bourbakiren lanetik kanpo geratu zen. Ekuazio diferentzialen kasuan, kaosaren, fraktalen edo sistema dinamikoen inguruan beste horrenbeste esan daiteke. Eta zer esanik ez azken urteotan hainbeste garatu diren konputazio zientzien inguruko esparruak, esaterako.

Estrukturen teoria formal arrakastatsu bat aurkeztuko dute Eilenberg eta Mac Lanek [Eilenberg & Mac Lane 1945] artikuluan[27]. Hori horrela izan daitekeela ukatu gabe, ordea, Bourbakirena bezalako proiektu bat aurrera eramateko orduan, kategorien teoriak eskaintzen duen estruktura kontzeptuaren formalizazio egokiagoak, hauetara ere ondo egokitzen ez diren matematikaren esparruak aurkitzeko arazo bera izan dezake. Matematikaren antolaketaren inguruan honakoa esaten du Mac Lanek:

> [...] multzoen teoria eta kategorien teoria matematikaren antolaketarako propo-

[25] Le point de vue des structures conduisant inexorablement, comme je crois l'avoir montré, à son propre dépassement dans la théorie des catégories. D'où la question: pourquoi Bourbaki, alors qu'il admet implicitement et hypocritement l'existence et l'importance des catégories, alors que les catégories doivent tant aux travaux de ses membres les plus actifs entre 1945 et 1970, ne saute-t-il pas le pas? Je crois que la réponse tient dans son exigence monolitique de rigueur. [Cartier 1998, 28. or.]

[26] Beraiek onartzen dute hori, baina, teoria horiek oraindik martxan daudela esanaz, eta oraindik ez daudela berregituraketa baterako prestatuta esanaz, justifikatu izan dute[Dieudonne 1982]

[27] Ideia hau defendatzen dute [Corry 1996]-k eta [Cartier 1998]-k, besteak beste.

> samenak bezala ikus daitezke [...] Ezein antolaketa ez da erabat arrakastatsua. Kategoriak eta funktoreak nonahi aurki daitezke topologian eta aljebraren zati batzuetan, baina ez dira oraingoz analisiaren gehiengora hain ondo egokitzen. Multzo teoria bitarteko praktikoa da, baina bere konstrukzioak batzuetan artifizialak dira [...] Oraingoz matematika kontzeptualki antolatzeko bide sinple eta egokirik ez dela ondorioztatzen dugu.[28]

Cartierrek [Cartier 1998] irekita uzten du. Bourbakik ordezkatzen duen estrukturalismo matematikoa, matematikaren ikuspegi metaforiko bat bezala hartu behar dela ondorioztatzen du, Euklidesena eta Bourbakirena bezala, matematikaren eboluzioak, beste berrestrukturaketa batzuk ere ekarriko dituela aurreikusiz.

Bukatzeko esan dezagun Bourbakik matematikaren inguruko kuestio logiko eta filosofikoetaz ez zeukala ezer esatekorik. Ez zen inoiz bere asmoa izan kuestio horietan sartzea eta era horretako eztabaidetatik aparte mantendu zen. Bere ustez matematikaren konsistentzia frogatzeak ez zeukan zentzurik, eta izatekotan ere kontraesanak agertuko balira, kontraesan horien oinarrien leudeken sistema axiomatikoak berrikusi beharko liratekeela uste zuen, Zermelok berak "Russellen paradoxaren" aurrean egin zuen moduan, hau konprehentsio axiomaren bidez saihestuz:

> [...] Oinarriei dagokienean matematikaren errealitatean sinesten dugu, baina, noski, filosofoek beren paradoxekin erasotzen gaituztenean formalismoaren atzean izkutatzera goaz azkar batean eta zera diogu: "Matematika esanahirik gabeko zeinuen konbinazioa baino ez da, " eta gero multzo teoriari buruzko 1 eta 2 kapituluak ateratzen ditugu. Azkenean bakean uzten gaituzte, gure matematikara itzultzen gara eta beti egin dugun bezala egiten jarraitzen dugu,

[28] [...] set theory and category theory may be viewed as proposals for the organization of Mathematics [...] Neither organization is wholly successful. Categories and functors are everywhere in topology and in parts of aljebra, but they do not as yet relate very well to most of analysis. Set theory is a handy vehicle, but its constructions are sometimes artificial [...] We conclude that there is as yet no simple and adequate way of conceptually organizing all of Mathematics. [Mac Lane 1986, 406-407 or.].

> matematikari bakoitzak duen, erreala den zerbaitekin lan egiteko sentsazioarekin. Sentsazio hau ilusio bat izango da seguru asko, baina oso komenigarria da. Hauxe da Bourbakik oinarrien inguruan duen jarrera.[29]

Ikusi daitekeenez, guk matematikaren kanpo oinarri deitu dugunari buruz, dihardu.

2.2.2 Estrukturalismoa matematikaren filosofian

Matematikaren filosofian eragin nabarmena izan zuen, nola ez, matematikaren transformazio sakon honek. Arestian aipatu ditugun autore desberdinek esplizituki aipatzen dituzte matematikari estrukturalista nagusien lanak, beraien teorien jatorrian daudela[30]. Metodologia estrukturalistak matematikaren filosofiarako dakartzan inplikazioak ulertzeko ahalegintzat hartu daitezke, matematikaren filosofiako metodologia estrukturalista desberdinak. Zeri egiten diote erreferentzia objektu matematikoek? Zer da proposizio matematikoak *egiazkoak* direla esatean adierazi nahi duguna? Zer esan daiteke objektu matematikoen existentzia eta izaerari buruz? Eta orokorrean, metodologia estrukturalistaren inplikazio semantiko, epistemologiko eta ontologikoak ulertzeko ahalegintzat. Matematikarientzat irrelebanteak izan daitezkeenak, guztiz. Edo ez.

Metodologia estrukturalista neutroa da zentzu honetan. Ez da filosofikoki posizionatzen[31]. Eta beraz, metodologia estrukturalistaren printzipioei printzipio semantiko, epistemologiko eta ontologiko berriak gehitu behar zaizkio, filosofikoki esangu-

[29] [...] On foundations we believe in the reality of mathematics, but of course when philosophers attack us with their paradoxes we rush to hide behind formalism and say: "Mathematics is just a combination of meaningless symbols," and then we bring out Chapters 1 and 2 on set theory. Finally we are left in peace to go back to our mathematics and do it as we have always done, with the feeling each mathematician has that he is working with something real. This sensation is probably an illusion, but is very convenient. That is Bourbaki's attitude towards foundations. [Dieudonne 1970, 145. or.]

[30] Ikusi, besteak beste, [Shapiro 1997, 14. or.], [Hellman 1989, vii. or.].

[31] Dudazkoa da, zenbait autorek kontrakoa esan arren [Reck 2003] Dedekinden filosofiarako asmoak gutxietsi egin direna, Bourbakitar batzuek, aldiz, kuestio filosofikoak esplizituki, are lotsagabeki, mespretxatzen zituzten. Ikusi [Dieudonne 1987]-ko azken kapitulua.

ratsua suertatzeko. Printzipio hauetan bereiztuko lirateke teoria estrukturalista desberdinak, Reck eta Pricerenn arabera [Reck & Price 2000].

Ez da gure asmoa, hemen, matematikaren filosofian estrukturalismo matematikoak dituen adarrak zehaztea eta hauen arteko desberdintasunak zeintzuk diren erakustea, bakoitzak galdera desberdinei zein erantzun ematen dien, eta zailtasun nagusiak non aurkitzen dituen erakusteko[32]. Estrukturalismo matematikoaren oinarrizko ideiak azaldu eta sortzen diren problemen aurrean aurkeztu izan diren bide desberdinak deskribatuko ditugu hurrengo orrietan. Shapirok *Filosofia-lehenbizi*[33] deitzen duen printzipioa, hau da, filosofiak, matematikaren izaera argituz, honen norabidea markatu behar duela dioena (eta historikoki gertatu ez dena) eta, kontrako muturrean, matematikaren filosofia matematikarako erabat irrelebantea dela, eta hor lantzen diren kuestioak "dibagatzaile arrotzen alferrikako sofistikazioak" baino ez direla, dioenaren bitartean kokatzen du matematikaren filosofiaren lekua: *filosofia-azkena-izatekotan-ere*[34] deitzen duena. Shapiroren hitzetan "matematikaren filosofiak betekizunen bat izatekotan, momentu horretara arte matematika praktikatu den moduaren araberako, matematikaren azalpen koherente bat ematea da hau", eta aurrerago, "matematikaren filosofia bat onartzen duen matematikari batek zerbait irabazi beharko luke honekin, lanerako orientazio bat, ..., eta gutxienez honen norabideari buruzko saiakera bat — zein problema diren garrantzitsuak, zein galdera egin beharko liratekeen, zein metodologia diren arrazoizkoak, zerk izan dezakeen arrakasta" [Shapiro 1997, sarrera]. Gehiegizkoa iruditzen zaigu azken pasarte honetan Shapirok matematikaren filosofiari eguneroko jardun matematikorako aitortzen dion errelebantzia. Ez dugu uste matematikaren filosofiak problema matematikako problema garrantzitsuei buruz edo arrazoizko metodologiei buruz ezer esatekorik daukanik. Ez eta matematikari gehienek era honetako baieztapenik onartuko luketenik.

[32]Ikusi horretarako [Reck & Price 2000], [Hellman 2001], [MacBride 2005], edo [Shapiro 1997].
[33]Philosophy-first.
[34]*Philosophy-last-if-at-all.*

Horrela bada matematikaren filosofiako estrukturalismo matematikoa, Bourbakiren lanean gorpuztutako matematika estrukturalistatik abiatzen da. Honen arabera teoria matematiko baterako objektu konkretuen (izan zenbakiak, funtzioak, multzoak, puntuak, etab.) barne izaerak ez du garrantzirik, hauek erlazionatzeko moduak baizik, objektu matematikoek, izatekotan ere, berezko izaerarik ez baleukate bezala.

Paul Benacerrafengan [Benacerraf 1965] jarri ohi da sarritan, segidan deskribatu nahi ditugun matematikaren filosofia estrukturalista desberdinen abiapuntuan. 1. kapituluan jardun dugu matematikaren filosofiak historikoki izan dituen xede orokorrak azaltzen eta hauei lotuta matematikaren kanpo oinarritzean kokatu ditugun, XIX. mende amaieran eta XX. mende hasieran abiatutako hiru proiektu nagusiak azaltzen: logizismoa, intuizionismoa eta formalismoa. Hirurak ere, matematika intuizio arrazionalaren esparrutik kanpo uzteko ahalegin bezala uler daitezke, eta zentzu horretan diogu, matematikaren teoria filosofiko antiplatonistatzat har ditzakegula. Ikusi dugun bezala, hirurek ere burutuak izateko oztopo gaindiezinak aurkitu zituzten bidean. Matematikaren izaeraren inguruko ikuspegi platonisten gorakada etorri zen horren ostean.

Objektu abstraktuen ezagutza nola lortzen den erantzutea platonistentzat nekeza suertatu ohi da. Espazio eta denboratik kanpo kokatzen badira objektu horiek, zein bide edo giza ahalmen darabilgu beraietara iristeko? Horrez gainera, platonismo matematikoaren defendatzaileek Benacerrafek [Benacerraf 1965] multzo-teoriazko platonismoari ezarritako problemari ere aurre egin behar izan zioten. Ia matematikako edozein esparru multzo teoriaren gainean eraiki edo modelatu daitekeela ikusi zen Dedekind, Cantor eta Zermeloren lanean ostean. Honek egoera asko sinplifikatzen zuen, batez ere, ohiko matematikariak bere esparruaz zuen ikuspegia: multzoak ziren oinarrizko objektu matematikoak, edo modu sofistikatuagoan esateko, multzo-teoriazko hierarkiak eskaintzen zuen matematika osorako beharrezkoa zen ontologia.

Baina multzoak erabilita aritmetika multzoen gainean eraikitzeko modu bat baino gehiago eman izan dira, zentzu askotan baliokideak izan daitezkeenak, baina desberdinak direnak, finean. Eta matematikariek ez daukate hauen artean, bata bestea baino egokiagotzat jotzeko modurik. Zermelok proposatu zuen, adibidez, 0 zenbakia, $\emptyset$ multzo hutsa izan zitekeela: $0 = \emptyset$, 1 zenbakia $\{\emptyset\}$: $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, 2 zenbakia $\{\{\emptyset\}\}$: $2 = \{\{\emptyset\}\} = \{1\}$, etab. Kasu honetan 0a ez beste zenbaki arrunt guztiak elementu bakarreko multzoak dira, eta elementu hori, hain zuzen ere, aurretik definitutako zenbakia da. Bestetik, Von Neumannek emandakoa daukagu. Honek 0 zenbakia aurrekoaren modu berean definitzen du: $0 = \emptyset$. Hortik aurrerakoan ordea beste logika bat jarraitzen du, zenbaki bakoitza ordurarteko zenbaki guztien multzo bezala definituz errekurtsioz: $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etab. Kasu honetan n zenbaki bakoitzak zehazki n elementu ditu. Bestelako propietate batzuk ere badaude, bi adibideen artean. Adibidez $1 \in 2$ al da? Zermeloren ereduan ez, baina Von Neumannenean bai. Zenbakiak, multzoen kontzepzio platonista onartzen duenak dioen bezala, multzoak badira, zein multzo diren erabaki behar dugu. Biak aldi berean ezin baitira zuzenak izan, multzoen arteko berdintzaren trantsitibitateak absurdura eramango baigintuzke. Zermelorenak edo Von Neumannenak dira benetako zenbakiak? Uler daitekeen moduan, galderak zentzu ontologikoa dauka, baina erantzun argirik ez. Benacerrafek argudio hau erabiliko du, zenbakiak multzoak ez direla eta multzo-teoriazko platonismo matematikoa baztertzeko.

Matematikaren teoria filosofiko estrukturalista bat garatzeko orduan, ordea, desberdintasun nabariak aurki daitezke autore desberdinen artean. Goian azaldu dugun bezala, oinarrizko metodologia estrukturalista komunari, printzipio ontologiko eta epistemiko dibergenteak eranstetik sortutakoak. Sailkapen exhaustibo bat emateko asmorik gabe, literatura filosofikoan aurki ditzakegun estrukturalimoaren bertsio nagusien ezaugarriak emango ditugu, hauen artean aukeraketa bat egin baino lehen, gero, aukeratutako estrukturalismoaren adarrak matematikaren barne oinarrietan egin ditzakeen ekarpenak aztertzen saiatzeko.

Matematikaren ontologia har dezakegu estrukturalismo adar desberdinen sailkapen baterako irizpide moduan. Badira ontologikoki oso sendoak diren estrukturalismoaren bertsioak, estrukturen eta hauen posizioen ontologia aberats bat postulatzen dutenak. Badira, baita ere, kontrako muturrean, objektu matematikorik ez dela existitzen dioten teoriak. Eta, azkenik, baita bitartean koka ditzakegun bertsioak ere, adibidez, matematikarako ontologia bat proposatuz, estrukturentzak leku berezirik utzi gabe.

Shapiroren terminologia geure egingo dugu aurrera jarraitzeko. Estruktura matematikoei, eta orokorrean estrukturei buruz hitz egiteko bi kontzeptu bereizten ditu Shapirok [Shapiro 1997]: *estruktura* eta *sistema*[35]. Sistema bat objektuen bilduma batek eta hauen arteko erlazio sare jakin batek osatzen dute. Shapirok maiz darabiltzan adibide batzuek aipa ditzakegu: gobernu bat, adibidez, gaineko-pareko-azpiko hierarkia erlaziodun pertsona sistema bat kontsidera daiteke; modu beretsuan, xake konfigurazio bat, pieza mugikor bilduma bat litzateke, erlazio espazial eta mugimendu-posiblezko erlaziodunak; edo saskibaloi talde bateko defentsa bat, pertsona bilduma bat "defentsa-rol" erlazioekin. Estruktura berriz sistema baten forma abstraktua litzateke, sistema batean objektuen arteko erlazioekin zerikusirik ez duten objektuen ezaugarri oro baztertzetik, eta erlazioak azpimarratzetik, lortzen dena. Gauzak horrela, estrukturalista batentzat, matematika puroa estrukturen edo estruktura bildumen azterketa deduktiboa da. Aritmetikak zenbaki arrunten estruktura aztertzen du, geometria euklidestarrak espazio euklidestarra etabar [Shapiro 1997].

Sistemen eta estrukturen gai honek filosofian aintzinakoa den *unibertsalen* edo propietateenarazoa dakarkigu gogora. Eta hain zuzen ere, unibertsalen inguruko eztabaida klasikotik hartzen dituzte izenak zenbait adar estrukturalistek. Platonenga-

[35] *Structure* eta *system*, hurrenez hurren, ingelesez. Resnikek beste terminologia bat darabil gauza beretsuak adierazteko: *pattern* eta *template*, hurrenez hurren.

naino lihoakiken lerro batek, behintzat unibertsal batzuk, hauek egikaritzen dituzten objektuak baino lehenagokoak, jatorrizkoagoak eta hauekiko independenteak direla esaten du. Aristotelesi egotzi izan zaio *ante rem errealismoaren* alternatiba bat, kasu honetan *in re errealismoa* deitutakoa. Honen arabera, unibertsalak edo propietateak, egikaritzen dituzten objektuak existitzen diren heinean baino ez dira existitzen, eta hauekiko dependitzen du, beraz. Bertsio honen arabera, objektu gorri guztiak deuseztearekin, galduko litzateke gorritasunaren unibertsala. *In re unibertsalak* dira horrela eraikitakoak. Badira bi hauez gain beste ikuspegi batzuk unibertsalen inguruan. Kontzeptualistek gure gogoetan egindako eraikuntzak direla argudiatzen dute, adibidez, eta nominalistek, izatekotan ere eraikuntza linguistikoak liratekeela.

Unibertsalen inguruko kuestio hauei erantzuteko moduaren arabera bereizten dira *ante rem estrukturalismoak* batetik, hau da, estrukturei, hauek egikaritzen dituzten sistemetatik aparteko existentzia aitortzen dieten teoriak, eta *in re estrukturalismoak* bestetik, hain zuzen ere, estrukturak egikaritzen dituzten sistemengan baino existitzen ez direla defendatzen duten, "estrukturarik gabeko estrukturalismoak". Estrukturei inolako existentziarik ukatzen dien ildorik ere bada, estrukturalismoaren baitan, "estrukturarik gabeko estrukturalismo" deitua.

Estrukturen inguruko posizio ontologiko desberdin hauetako bakoitzetik, adar gehiago ateratzen dira, filosofikoki garrantzitsuak izan daitezkeen beste aspektu batzuen gainean posizionatzean, hala nola, epistemologian edo semantikan.

Sistema desberdinek estruktura bera gorpuztu/egikaritu/errepresentatu dezakete. Alderantziz formulatu nahi izanez gero, estruktura bat sistema baten forma abstraktua dela esan daiteke. *Ante rem errealismoa edo platonismoa* deitu izan zaio honi, eta era honetako unibertsalei *ante rem unibertsalak*. Honen arabera, adibidez, gauza gorririk ez balego ere, gorritasunaren propietatea existituko litzateke. Guztiek dituzte aldeko puntuak, zenbait galdera erantzuteko orduan oso baliagarriak suertatzen direlarik, eta, aldiz, guztiek dituzte arazoak beste zenbait puntutan, erantzun ezindako galderekin topo egiten dutelako. Horretan datza, hain zuzen ere, baten edo bestearen alde egiteko eztabaidek garaile argirik ez izatearen arrazoia.

Ante rem estrukturalistarentzat, esandakoaren arabera, zenbaki arrunten estrukturak existentzia objektiba dauka, egikaritzen duen sistemarik egon ala ez. Zenbaki arrunt bat, adibidez, zenbaki arrunten estrukturako posizio bat da. Bulego bat edo rol bat izango balitz bezala ulertuta. Gero, estruktura hori egikaritzen duten sistema konkretuen kasuan aurkituko ditugu, 2 zenbakiaren bulegoa edo rola beteko duten objektuak. Baina zenbakia, bera, kasuan kasuan objektu partikularrek beteko duten bulegoa bezala kontsideratzen da.

Aurrez azaldu dugun Benacerrafek planteatutako problema gainditzea lortzen du *ante rem* estrukturalismoak, ontologian errealistak zirenei arazo serioak ematen zizkien problema. Gogoratu zenbaki arruntentzat multzo-teoriazko eraikuntza desberdinak onargarriak izanik, benetakoa zein den erabaki ezinda geratzen ginela. Benacerrafek problema honi ematen dion soluzioa, zenbaki arruntak, objektuak ez direla kontsideratzea da. Hau da baztertu egiten dute errealismoa ontologian. Ez da hau, ordea, ante rem estrukturalisten bidea. Zenbaki arrunt bat, esan dugu jadanik, zenbaki arrunten estrukturako posizio bat da. Estruktura horren baitan definitu daitezkeen erlazioak dira erlazio aritmetikoak: txikiagoa izatea, zatigarria izatea,... Ante rem estrukturalistentzat Benacerrafen problemak planteatutako galderek ez dute erantzunik behar. Zenbakien arteko zenbakizko-erlazioen inguruko galderek erantzun bat izatea espero izatekoa den bezala, hori ez baita horrela, erlazio horiek zenbakizkoak ez direnean. Horrela $1 < 3$ edo 3-k 8 zatitzen du, zenbaki arrunten estrukturari dagozkion galderak diren bitartean, 1 zenbakia 3 zenbakiaren elementua den galdetzen bada, ez dago erantzunik. Aritmetikoki zentzurik ez daukan galdera bat da. Shapirok esaten duen moduan, 1 zenbakia 3 zenbakia baino barregarriagoa den galdetzea bezalakoa litzateke.

Garbi dago intuitiboki desberdina dela objektu batez eta estruktura bateko posizio batez hitz egitea. *Ante rem* estrukturalismoak jasotzen duen kuestio honi lotutako beste ezaugarri bat objektuei eta existentziari buruz erakuts dezakeen erlatibotasunean datza. Praktika linguistikoan antzematen da erlatibotasun hori. Estrukturei eta hauen lekuei buruz hitz egiterakoan bi ikuspei desberdin ageri direla ohar gaitezke. Batetik, estruktura bat eta bere posizioak, estruktura egikaritzen duten sistemetariko baten kontestuan eztabaidatu daiteke. Adibidez xakearen adibidea hartuta, joko batean erregina zuriaren zaldia dena, beste joko batean errege zuriaren alfila izan daiteke. Edo gobernuaren adibidea hartuta, agintaldi batean lehendakari ordea dena, beste agintaldi batean gobernuaren bozeramailea izango da parlamentuan. Sistema hindo-arabiarrean "2" ikurrak betetzen du biaren rola eta sistema erromatarrean "II" ikurrak. Shapirok "posizioak-bulegoak-dira"[36] perspektiba deitzen dio honi. Horrela hitz egiten denean, estrukturetako posizioek, objektuak baino, propietateak dirudite. Estrukturetako posizioetan joango diren objektuen oinarriko ontologia bat eskatzen du honek. Gobernuaren kasuan pertsonak, xakearen kasuan pieza mugikorrak lirateke ontologia hori osatuko luketenak. Aritmetikaren kasuan multzoak, edo beste zerbaitek.

Bada beste perspektiba bat. Estruktura jakin bateko posizioak objektuak bezala tratatzen direneko kasuetan ematen dena. Kasu hauetan estrukturaren posizio bat denotatzen duten terminuek izen bereziak bailiran jokatzen dute. Gobernuaren adibidea hartuta, lehendakaria gobernuburua dela diogunean, edo xakea hartuta, dorreak horizontalean nahiz bertikalean soilik mugi daitezkeela diogunean, ematen da. Shapirok "posizioak-objektuak-dira"[37] perspektiba deitzen dio. Sistema partikularretatik aparte, estrukturari buruzkoak dira esaldi hauek. Bigarren aukera hau da ante rem estrukturalistek matematikarako hobesten dutena. Esaldi bat zentzu hone-

[36] "Places-are-offices".
[37] "Places-are-objects".

tan ulertzeko nahikoa da esaldia estruktura egikaritzen duten sistema guztien gaineko orokorpena bailitzan interpretatzea. Hizkuntza matematikoaren azpiko logika bigarren perspektiba honek jasotzen du. Hori dela eta, $7+9=16$ bezalako esaldietan, agertzen diren zenbakiek, aritmetikako estrukturaren posizioak denotatzen dituzte. Zilegitasun osoko objektuak direla kontsideratzen dute.

Ante rem estrukturalismoa baztertuta, *in re* estrukturalismo batera hurbildu nahi duen teoria batek, "posizioak-objektuak-dira" proposizioak, dagokion estruktura egikaritzen duten sistemen orokorpenak aditzera emateko modu bat bezala interpretatu beharrekoak dira, eta inolaz ere hitz-hitz esaten dena ulertuz. Itxura batean singularrak diruditen terminuek, aldagai lotuak izkutatzen dituzte, hauen ustez. Horrela adibidez "$3+9=12$" moduko proposizio baten esanahia, ondokoa litzateke: S, zenbaki arrunten edozein sistematan, S-ko hirugarren posizioan doan objektuari, S-ko bederatzigarren posizioan doan objektua batuz, S-ko hamabigarren posizioan doan objektua ematen du. Hau da aritmetikako edozein Φ proposiziok, horrelako zerbait izkutatuko luke: $\forall S\ \Phi(S)$, "posizioak-objektuak-dira" proposizioak, "posizioak-bulegoak-dira" perspektiban parafraseatuz.

Proposizio matematikoak era honetan orokortzea, estrukturalismoaren adierazlea litzateke, baina estrukturen existentziarik asumitu gabe. Zenbakiei buruz hitz egitea sinpleagoa da, aritmetikako estruktura egikaritzen duten sistema guztietaz hitz egitea baino, eta orokorrean, estrukturetaz hitz egitea, hau egikaritzen duten sistema guztietaz hitz egitea baino errazagoa da. Hemen kokatu beharko litzateke Parsonsen hasierako ikuspegia [Parsons 1990], berak *estrukturalismo eliminatibista* deitutakoa, edo lehen aipatutako Benacerrafena [Benacerraf 1965], zenbakiak objektuak direla baztertuz eta zenbakien teoriak sistema aritmetiko guztien propietateak lantzen dituela esatean.

Gorago esana dugu, "posizioak-bulegoak-dira" perspektiba batek oinarriko ontologia nahiko bat eskatzen duela *in re* estrukturetako posizioak betetzeko balioko duena. Adibidez zenbaki arrunten edozein sistematan objektu kopuruak infinitu zenbagarria izan beharko luke, analisiko edozein sistematan zenbaki errealen multzoaren kardinal berekoa eta abar. Ontologia infiniturik ezean, aritmetikako nahiz analisiko edozein proposizio, tribialki egiazkoa litzateke, $\forall S\ \Phi(S)$ egiazkoa litzatekeelako, S-rik ezean.

Bi erantzun eman izan zaizkio mehatxu honi in re estrukturalismoaren barrutik. Batetik aztertu beharreko estruktura matematiko guztietarako nahikoa litzatekeen ontologia bat postulatzea, adibidez multzo-teoriazko hierarkiak emango lukeena.[38] *Estrukturalismo eliminatibista ontologikoa* deituko dugun bide honek izango lukeen ezaugarri garrantzitsu bat honakoa da: oinarriko ontologia ez dela estrukturalismoaren ikuspegitik aztertu beharrekoa, honen jatorrian dagoen heinean, gurpil zoroen bidezko definizioak saihestu nahi badira. Multzo teoriako hierarkia jarriko bagenu, adibidez, oinarriko ontologia horretan, ezingo genuke multzo teoriaren ikuspegi estruktural bat izan, edo izatekotan oinarriko ontologiarako beste lehengai batzuk beharko genituzke. Beraz ikuspegi honetatik teoria matematikoak estrukturalak lirateke, ontologiako beharrezkoa dena izan ezik.

Nominalisten estrukturalismo modala da beste aukera. Estrukturalista nominalistentzat, estrukturalismo eliminatabista ontologikoak egiten duena, ontologiarako beharreko objektu abstraktuak postulatuz, ezinezkoa da. Beraiek ez dute objektu abstraktuen existentziarik onartzen. Ez da onargarria ante rem estrukturak baztertzea, eta gero multzoen existentzia postulatzea. Eliminatibistek edozein proposizio aritmetiko orokortu, ontologia egokirik ezean, hutsalki zuzena izateko arriskua saihesteko, modalitatera jotzen dute. Aurrekoek, edozein Φ proposizio aritmetiko $\forall S\ \Phi(S)$ bezala interpretatzen bazuten, nominalistek, "edozein S sistema aritmetiko *posibletan*, $\Phi(S)$" bezala interpretatuko dute. Aurreko kasuan ez bezala, sistemen gaineko S

[38] Badira beste aukera batzuek: Quine, Lawvere, McLarty,... Ikusi [Shapiro 2000, 272. or.]

aldagaia, kasu honetan eragile modal baten irismenaren barruan mugituko da. Geoffrey Hellmanek zehaztasunez jorratzen du bide hau [Hellman 1989]. Honek ere, nola ez, soluzionatu gabeko arazoak dauzka. Modalitatearen izaerari lotutakoak nagusiki.

2.3 Ondorioak

Lehenbiziko kapituluan ikusi dugu XIX. mendean zehar eman zen analisiaren aritmetizatze eta aritmetikaren multzoetarako erredukzioak matematika multzoen teorian oinarrituta egotearen ideia zabaltzeko balio izan zuela. Azken batean matematikariek ulertu zuten, objektu matematikoen izaeraren inguruko kuestio guztietatik aparte, behar zuten guztia multzoen bidez eraiki zezaketela, eta ez hori bakarrik, multzoen hizkuntzak arrazonamendu matematikoak zehaztasun osoz komunikatzeko estandar egokiak ezartzeko balio zuela. Horri Zermeloren axiomatika gehituz gero, multzoen definizioak saihestuz, hauek era axiomatiko batez definitzea lortu zen. Konprehentsio axiomak gainera Russellena bezalako kontraesanak saihesten zituen, eta Gödelen teoremekin, matematikaren konsistentzia barrutik frogaezina zela frogatu ostean, ez zegoen gehiago espero izaterik. Multzo teoriako hizkuntza erabilita matematika egiten jarraitzea baino ez zen geratzen.

Lehen kapituluan ikusitako Fermat eta Descartesen adibideek erakutsitako matematikaren aljebraren bidezko antolaketaren harian, hala ere, teoria matematiko partikularren, eta hauen arteko erlazioak erakutsiz, matematika beraren barne antolaketan funtsezkoa suertatuko zen kontzeptu bat ezaguna zen aljebra modernoaren sorrera garairako. Estruktura aljebraikoarena, hain zuzen ere.

Kapitulu honetan ikusi dugu nola sortu zen kontzeptu hau Galoisen lanetan. Talde eta gorputz estrukturak dira Galoisen lanetan aurki daitezkeen estruktura aljebraikoak. Aurreko matematikariek ondo erlazionatzen ez zekizkiten ekuazio aljebraikoen erradikalen bidezko soluzio partikularrek ezkutatzen zuten sekretua azaleratzeko gauza izan zen Galois, problema orokorraren izaera abstraktua agerian jartzeko balio izan zuten ekuazioen erroen permutazio jakinetan eta hauen arteko konbinaketetan fijatuz. Permutazio berezi hauek, gerora matematikan beste hainbat eta hainbat objektuk bete izan dituen propietateak betetzen zituztela konturatu zen Galois, aurrerago talde axiomak izango zirenak hain zuzen ere. Ekuazio aljebraiko bakoitzarentzat, honen erroei lotutako permutazio berezi batzuk identifikatu zituen, ekuazioaren Galoisen taldea definitzeko. Modu abstraktuan (taula erabilita) kontsideratutako talde honen propietate konbinatorioek, problema karakterizatzen zutela ikusi zuen Galoisek, estruktura aljebraiko abstraktuek problema matematikoak ulertzerakoan izan dezaketen errelebantzia agerian jarriz. Edozein matematikarirentzako saihestuezindako aurrekaria jarri zuen Galoisek, honela. Bide batez ekuazio aljebraikoak erradikalen bidez ebaztearen problema karakterizatuta geratu zen (soluzio konkretuak bilatzetik harago; honetarako Galoisek ez baitzuen erantzunik eman). Galoisen lanak oso kontuan hartuta emango du, esaterako, Kleinek 1872an Geometriaren berrantolaketa sakona, eta neurri batean, geometriaren "amaiera" ekarriko duen *Erlanger Programm* ezaguna. Ekuazioen erroen permutazioen taldeak beharrean, sistema geometriko baten simetrien taldeak kontsideratuta.

Galoisen lanaren esanahi sakona ulertu ahala, estruktura aljebraikoaren ideiak matematika guztiz transformatuko du XIX. mendearen erdialdetik XX. mendearen erdialdera bitartean. Galoisen erako estruktura aljebraikoak, multzo teoriaren hizkuntzak eskainitako zehaztasunarekin eta metodo axiomatikoak emandako sistematizazioarekin loratuz joango dira, esaterako, zenbakien teorian erakutsiko duten emaitzak orokortzeko eta teoriak estrukturatu eta argitzeko joerarekin. Alemanian eman zen estruktura aljebraikoen ugaltze hau, batez ere Dedekind, Noether eta Artinen lanetan. Lan guzti hauek modu sistematiko batez antolatu eta aljebra berriaren ikuspegi homogeneo bat eskainiko duen lehenbizikoa izan zen Van der Waerdenen [Van der Waerden 1930-1931]. Aljebraren barne oinarrietan kokatu beharrekoa da

Van der Waerdenen ekarpen nagusia. Ekuazio aljebraikoak aljebran paper zentral bat izatetik, bazterreko kasu bat izatera pasako dira, estruktura aljebraikoen bidez "estrukturatutako" esparru berrituan. Estruktura aljebraikoak aukeratzen ditu Van der Waerdenek bere testuaren printzipio ordenatzailetzat. Bi zentzutan da beraz estrukturala Van der Waerdenen lana: esplizituki, aljebra estruktura aljebraikoei buruzko esparru bezala deskribatzen duelako, eta inplizituki, multzo teoriazko hizkuntza eta metodo axiomatikoaren erabilerak metodologia estrukturalista deitu duguna ekartzen duelako teoria matematikoen garapenera. Estruktura aljebraiko guztietan problema eta konstrukzio errekurrenteen bidez, hauen ikuspegi homogeneo eta bateratu bat ematea lortzen du.

Van der Waerdenek aljebrara ekarritako estrukturalismo bikoitz hori, moldatuta, matematika osora zabaltzeko ahalegin bezala defini daiteke Bourbakirena. Estruktura aljebraikoek matematikan problema zailak ebatziz erakutsitako errelebantziaren jakitun eta Van der Waerdenek kontzeptu hau printzipio ordenatzaile bezala hartuta emandako aljebraren ikuspegi bateratua orokortu nahi izan zuen Bourbakik. Horretarako Van der Waerdenen prozedura bera baliatu zuen, ahal zen neurrian zorroztuta. Batetik, multzo teoria "naïve" baina esplizitu bat aukeratuko du, Zermelorena matematikarako beharrezkoa ez dela iritzita, estruktura matematikoak zorroztasunez eta hizkuntza homogeneo bat erabiliz deskribatzeko nahikoa izango zaiona. Van der Waerdenen estruktura aljebraikoetatik harago, beharrezkoa ikusten du, hauekin batera, topologia eta orden estrukturak ere bere hierarkia horren oinarrian jartzea. Oinarrizko estruktura hauen konbinazioetatik, orokorretik konkreturako bidea eginez, matematikaren esparru desberdinak, deskribatuz joango da. Bourbakik badaki emandakoa inola ere ez dela defintiboa, matematika etengabeko eboluzio batean egonik, posible dela estruktura klase berriak sortzea, esparru desberdinetara hobeto egokitzen direnak, eta beraiek egindakoa berregitea eskatzen dutenak. Hala ere, multzo estrukturatuaren ideia, esparru matematikoak ulertu eta hauen arteko erlazioak argitzeko, eta azken batean, matekatiren helburu, metodo eta hizkuntzaren batasuna erakusteko ezinbestekotzat jotzen du. Matematika puro osoa estrukturen bidez antolatu eta bateratzekoa da Bourbakiren estrukturalismoa.

Metodo axiomatikoari matematikaren batasuna bilatzerakoan Bourbakik ematen dion inportantziak zuzenean eramaten gaitu gainera matematika metafora arkitektoniko bat erabiliz deskribatzera. Ideia hau ez da Bourbakirena, aspalditik datorrena baizik, bereziki metodo axiomatikoari lotuta. Lehen kapituluan ikusi dugun Russellen proiektu logizistan ere badago ideia hori beste modu batez adierazia, Russellek Peanok aritmetika elementalarentzat erakutsitako bidea oinarritzat hartzen zuen logikari aplikatuz. Oinarrizko kontzeptuak eta proposizioak zerrendatuta sistema finkatuta geratzen da. Metodo axiomatikoa erabilita proposizio horien arteko erlazioak erakutsi eta, beraz, matematikarako garrantzitsua dena hain garrantzitsua ez denetik bereiztu beharko du matematikariak, aldi berean hierarkia hori azaltzerakoan esanguratsuak izan daitezkeen kontzeptu konplexuak esplizituki definituz. Matematika proposizioen osotasun ideal bat bezala existitzen dela eta matematikariaren lana proposizio hauek aurkitu eta teorietan integratzea dela dioen tesiak indarrean jarraitzen du Bourbakiren lanean.

Gero eta argiago dagoenez, ordea, matematika klasikoaren esparru handiak ezin izan zirela Bourbakiren estrukturetara moldatu. Mac Lanen kritikak gogoan hartuta [Mac Lane 1996b] aldagai konplexu bateko analisia, ekuazio diferentzialak, sistema dinamikoak eta analisiko beste hainbat parte nekez moldatu daitezke axiomen bidez definitutako era bateko nahiz besteko estrukturetara; gauza bera esan dezakegu Bourbakiz geroztik konputazio zientziekin eta algoritmoen teoriarekin lotutako esparruengatik ere. Cartierrek azpimarratutako geometriaren eboluzioak ere [Cartier 1998] (Groethendieck eta honen ondorengoen lanetan) modu fortzatu batean baino ezin dira eraman multzo teoriazko estrukturen bidezko deskribapenetara. Cartierren hitzetan, Bourbakik (nahita) ahaztuta izan zuen kategorien teoriak askoz esparru naturalagoa eskaintzen du esparru hauetan.

Bourbakiren estrukturak ez lirateke, beraz, Bourbakik iradoki bezala, matematikaren taxonomiarik egokiena emateko gauza litzatekeen printzipio ordenatzailea. Honek ez du inola ere Bourbakiren lana baliogabetzen. bourbakiren garaian matematikan zabaldu ziren multzo teoriazko estruktura matematikoek gaur egun paper garrantzitsua betetzen jarraitzen dute matematikaren barne antolaketan, kategorien teoriak lehen lerrora ekarritako funtzio eta funktore kontzeptuekin batera. Eta hauei lotuta, nola ez, multzo teoria ere ezinbestekoa da gaurko matematikan izan bertsio batean edo bestean, hizkuntza homogeneo bat eskainiz, arrazonamendu matematiko zorrotzentzako estandar komunak ezarriz, eta behar den kasuan matematika lasaitasunez egin ahal izateko segurtasun eskema nahikoak ezarriz.

Gaur egungo matematikaren praktika, estrukturak eta estrukturen arteko morfismoak, dagokien lekuan kokatzen dituen, ketegoria eta funktoreen teoriak hobeto jasotzen omen du zenbait autoreren ikuspegian. Hau da hurrengo aztertu beharrekoa.

3 Funtzionalismoa

3.1 Estrukturalismo kategoriala

Bourbakiren proiektua matematikaren barne oinarrien inguruko proiektu bat zela argudiatu dugu aurreko gaian. Multzo-teoriazko estrukturak dira Bourbakiren estrukturak, multzoak estrukturak definitzeko ezinbesteko lehengaiak izanik. Estruktura bezala ulertzen dena ez baita estrukturadun multzoa besterik. Bada ordea estrukturak ulertzeko beste biderik, azken urteetan *estrukturalismo kategoriala* deitu izan dena, adibidez, gaur egungo jardun matematikoari, Bourbakirenaren erako multzo-teoriazko estrukturalismoa baino hobeto egokitzen omen dena, honen aldekoek diotenez[1]. Eta estrukturalismo kategorialari, eta matematikaren izaera funktoriala hobeto azaltzen duelakoan, eman dira matematikaren oinarritze kategorialerako saiakera desberdinak. Matematikaren oinarrietarako erantzun definitiborik ezean, "kategorien teoriak gaur egungo matematikan gutxienez paper metodologiko garrantzitsu bat joka dezake, XIX. mende amaieran eta mende honetan zehar multzoen teoriak jokatutako paper garrantzitsuaren antzekoa"[2].

[1] Ikusi, besteak beste, [Awodey 1996], [McLarty 2008] eta [Marquis 2009].

[2] Category theory has at the very least an important methodological role to play in contemporary mathematics, in the same way that set theory played a crucial methodological role during the late 19th and this century. [Marquis 1995, 438. or.].

3.1.1 Kategorien teoriaren garapena

Eilenberg eta Mac Lanek 1942an topologia aljebraikoan ekin zioten elkarlanean aurkitzen da Kategoria Teoriaren jatorria. Espazio konkretu batzuren homologia taldeak kalkulatzeko, Mac Lanek garatutako metodo aljebraikoak aplikatzen saiatzean. Konturatu ziren agertzen zitzaizkien talde homomorfismo asko "naturalak" zirela zentzuren batean. *Isomorfismo natural* adierazpena erabiltzen bazuten ere, definizio zehatzago baten beharra ikusi zuten. 1945ean [Eilenberg & Mac Lane 1945] eman zuten argitara "General Theory of natural equivalences" artikulua, ofizialki kategorien teoriari hasiera eman ziona. Artikulu honetan teoria axiomatiko bat deskribatzen da, beren asmo nagusia den isomorfismo naturalaren nozioa definituz eta alor desberdinek elkarbanatzen duten estruktura mugatzeko erabiliz. Azken helburu hori lortzeko definituko dituzte *funktoreak* eta, era berean, hauek definitzeko kategorietaz hitz egitera behartuta ikusten dute euren burua, matematikaren multzo-teoriazko ikuspegiaren eraginez funtzioak bi domeinuren artean baino ezin baitaitezke definitu [Mac Lane 1996b]. Ikusi daitekeenez, kategorien teoriako kontzeptu nagusiak ez ziren kategoriak[3]. Kategoria bat funktoreak definitzeko beharrezko tresna bat baino ez da hasiera batean. Eta funktoreak ere multzo teoriazko ohiko funtzioen eran hartu zituzten[4]. Cartan eta Eilenbergek 1956an aljebra homologikoari buruz argitaratutako liburuak [Cartan & Eilenberg 1956], esaterako, Hom eta Ext funktoreek jokatzen duten paperaren ingurukoa izanik, kategoriak definitu ere ez ditu egiten. Hau bezalakoak izango ziren, kategorien teoriaren garapena prestatuko zuten lanak, kontzeptu kategorialak praktika matematikoan txertatuz, eta hizkuntza kategoriala zabalduz, funktore eta diagramen terminoetan problema matematikoak egoki nola formulatzen ziren erakutsiz, eta gerora kategorien teoriak bereganatuko zituen teknika eta tresnak

[3]Gerora ere zeresana izango du honek.

[4]Funtzio berezi hauen domeinu eta kodomeinuek Russellen antinomiaren bidetik arazoak planteatzen zituztela jakitun, ZFC baztertu eta multzoak eta klaseak bereizten dituen NBG sistemaren baitan definitzea ere planteatu zuten, baina azkenean ikuspuntu *naïve* bat gailendu zen eta oinarrien kuestio hauei ez zieten garrantzia handiegirik eman, ikusirik praktikan multzo edo klase hauen gainean egin beharreko eragiketak oso sinpleak zirela eta ez zutela praktikan arazorik suposatzen. Ikusi [Eilenberg & Mac Lane 1945, 247. or.].

aurreratuz.

Multzo teoriazko hizkuntzaren alternatiba bat bezala ikusi izan zen kategorien teoria hasierako urteetan. Bereziki topologia aljebraikorako eta honen hurbileko esparruetan erabilgarria suerta ziekeena, baina hizkuntza bat baino ez izanik, berezko emaitza garrantzitsurik eman ezin zezakeena[5]. Batzuetan egokia eta emankorra izan zitekeen "hizkuntza soila" baino zerbait gehiago izan zitekeenaren ideiak, 50. hamarkadaren erdi aldera Groethendieck eta Kan-ek argitaratutako lanak iritsi arte itxaron behar izan zuen.

Groethendieck-ek 1957an argitaratutako artikulua [Groethendieck 1957] izan zen, bide horretan lehenbiziko mugarria jarri zuena. Bertan definitzen zituen *kategoria abeldarrak*. Groethendieckek definitutako kategoria abeldarren kontestuan, estruktura tipo bat, objektuen artean existitzen diren funktoreen arabera karakterizatzeko aukera zegoen, objektu edo morfismo hauek nola osatuak zeuden hitz egin beharrik gabe. Hortik ikusiko dute Landryk eta Marquisek [Landry & Marquis 2005] kategoria batetako objektu nahiz geziak zerez eginak dauden arduratu beharrik gabe, ZF edo NGB bezalako multzo teoria axiomatikoekiko dependentzia desagertzen dela eta multzo teoriaz bestelako oinarri alternatiboetan pentsatzeko aukera erreala zabaltzen dela.

Garai beretsukoa da baita ere Kanek ekarritako *funktore adjuntuaren* kontzeptua [Kan 1958]. Homotopia teoria konbinatorio deitu izan denean lanean zebilela, funktore adjuntuaren nozioaren bidez, aurrez lortutako zenbait emaitza bateratzeko bidea ikusi zuen honek. Honenbestez, funktore adjuntuaren nozioaren inguruan norabide berri bat hartzeko moduan zegoen kategorien teoria. Kategoria teoriaren lehenbiziko fasean kategorien teoria, estrukturatutako multzoen sistemetan gauzatu

[5] Hortik Kategorien teoria mespretxuz *general abstract nonsense* bezala ezagutu izana urte askoan zehar.

zenez, kategoriak beraiek ere estrukturatutako multzoen sistemak bezala ikusten ziren: Bourbakiren erako estrukturak zenbait kasutan modu egokiago eta orokorrago batean jasotzen ziren, multzo teoriazko estrukturetan baino hauen arteko *morfismo* edo *gezietan* jarriz.

Hirurogehigarren hamarkadan hizkuntza kategoriala, objektuak, morfismoak, kategoriak eta funktoreak zuzenean erabiliz, kategorialki estrukturatutako sistemen arabera kontzeptu eta teoriak garatzeko aukera ireki zen, estrukturatutako multzoetatik hauen kategoriarako ohiko bidea jarraitu beharrean. Behin hori eginda posible zen kategorialki estrukturatutako sistemen adibide gisa jar zitezkeen, orduan, estrukturatutako multzoen adibideak jartzea, beti ere kategoria horiek errepresentatzen dutena agortzen ez dutela jakinik. Jadanik estruktura kategorialak ez ziren soilik, Bourbakiren erako multzo teoriazko estrukturak berrinterpretatzera mugatzen baizik eta, ordura arte estrukturalki kontsideratu ezin izandako objektuak ere estrukturalki kontsideratzeko aukera eman zuten, estrukturaren kontzepzioa zabalduz.

Pentsatzeko eta lan egiteko ikuspuntu kategorialak, kontzeptu eta teoria matematikoen aurkezpenari buelta ematea dakar, nolabait esateko. Puntuen eta espazioen artean jatorrizkoa zein den erabakitzerakoan bi aukera daude: puntuak izatea jatorrizkoak eta espazioak puntuz osatuta egotea edo, alderantziz, jatorrizkoak espazioak izatea eta puntuak hauetatik ateratzea. Lehenbiziko aukera "matematika atomista" eta *behetik-gorako* matematika ere deitu izan da. Bigarrena "matematika aljebraikoa" bezala, eta aurrekoarekin kontraposizioan, *goitik-beherako* matematika bezala ere bai[6]. Bigarren aukera honekin bat egingo luke hirurogehigarren hamarkadatik aurrera garatu den kategorien teoriak eta ikusiko dugunez autore batzuen arabera matematikak ere bai.

Eta matematikaren oinarriei dagokienean ere aplikatu daiteke dikotomia hau, kla-

[6]Ikusi [Awodey 2004], [Landry & Marquis 2005] eta [Marquis 2009].

sikoki multzo teoriazko *behetik-gorako* ZF eta honetan oinarritutako Bourbakiren ahaleginaren pareko oinarritzeen aurrean, hirurogehigarren hamarkadatik aurrera egin diren Kaategoria teoriazko *goitik-beherako* oinarritze ahaleginak ere izan dira eta.

3.1.2 Estrukturalismo kategorial ez fundamentista

Lehenxeago ere aipatu dugu. [Eilenberg & Mac Lane 1945] artikuluan jasotakoa, matematikariek esplizitu egin gabe, esparru desberdinetan (topologia aljebraikoa, aljebra homologikoa,...) zerabiltzaten kontzeptuak eta metodoak esplizitu egitetik sintetizatutako teoria bat zen. Bourbakiren multzo-teoriazko matematikaren berrantolaketa ahaleginetan jadanik paper garrantzitsua jokatzen zuten morfismoek, goragoko abstrakzio maila batetik, eta multzoei zentralitatea kenduz, panoramaren erdi-erdian kokatzen zituen teoria berriak, puntuzko izaera zuten objektuekin batera. Estruktura matematiko kategorialak objektu bildumak ziren, jakineko baldintzekin hornitutako, hauen arteko morfismo edo geziekin batera. Objektu horiek barrutik estrukturatu beharrean beren elementuen arteko erlazioak emanaz, kanpotik erlazionatzen ziren beraien arteko erlazioak (geziak) emanaz. Matematika modernoaren izaera estrukturala, gero eta gehiago, arreta aplikazio sistemetan jartzeak eta objektuak, hauen "transformazio onargarrien" bidez determinatzeak ezaugarritzen duela esaten du bereziki kategorista talde esanguratsu batek. Eta hala ere, guzti honek inplikatzen dituen metodoak, ez direla azken urteotara arte aintzat hartu, multzoen aldeko eredu teoriazko azalpenen mesedetan[7]. Aldiz, gaur egun Kategorien Teoriak lortu duen garapen mailak, gaur egungo matematikaren "azalpen egoki bat" emateko bidea argitu dezakeela defendatuzen dute[8]. Ikuspegi kategorial batek eman dezakeen matematika estrukturala zertan datzan argitzen saiatuko gara posizio hauek diotena zehazteko [Awodey 1996] bidelagun hartuta.

[7]Matematikaren filosofiari dagokionean Shapiro edo Resniken estrukturalismoak esaterako, multzo teoriazko ereduen teoria hartzen dute erreferentziatzat, kategoriak alde batera utziz.

[8]Nagusienetako batzuk aipatzearren [Marquis 1995], [Awodey 1996], [McLarty 2008].

Awodeyren deskribapena Bourbakiren multzo teoriazko estrukturetatik abiatzen da, eredu-teoriazko ere deitzen duena[9], eta matematika modernoan emandako metodo axiomatikoaren perfekzionamenduaren ondorio dena. Urte luzez objektu matematikoak deskribatzeko egokia suertatu da ikuspegi hau (XX. mendean). Ikusi dugun bezala hau da Bourbakiren lana *estrukturalistatzat* jo izanaren arrazoia. Matematikaren ikuspegi estruktural konkretu bat ematen du erabilitako metodologiak aurreko kapituluan ikusi dugun bezala. Bourbakiren lanetan estruktura bakoitzari lotutako morfismoak agertzen dira, eta paper garrantzitsua jokatzen dute, sarritan teorien garapenetan, objektuen propietate garrantzitsuak isomorfismoek errespetatzen dituztenak izateraino. Gogora ditzagun hemen Mac Lanen hitzak:

> Bourbakik eta beste askok kuestio zentral bat jartzen zioten beti edozein mekanismo matematiko berriri: "Zeintzuk dira morfismoak?" Estrukturak derrigorrean morfismoetara daramate, bai Bourbakiren kasuan eta bai beste edozeinenean. [10]

Bourbakiren garai oparoenetik matematika asko zabaldu eta asko aldatu da. Zaila da gaur egun Bourbakiren estruktura baten baitatik atera gabe lan egiten duen matematikaririk aurkitzea. Eta Awodeyk kategorien teoriari erreferentzia eginez aipatzen duenez, "Bourbakiren estruktura matematikoaren nozioak seguru asko [...] paperen bat jokatuko duen arren, estruktura matematiko klase desberdinak isolatu, deskribatu eta konparatzeko metodoa tresna eraginkorrago bat bezala agertzen da'. Estruktura matematiko desberdinek parte hartzen duten problemak modu eraginkorrean tratatzeko beharretik sortzen da kategorien teoria. Hori da Awodeyk defendatzen duena.

Kategoria bat estruktura matematiko klase bat duten eta estruktura hori gordetzen duten aplikazioez osatua dagoela esan daiteke. Adibidez **Set** kategoria, multzoez eta hauen arteko aplikazioez osatutakoa, **Grp** taldez eta hauen arteko talde

[9] Multzo teoriazkoa guri hemen dagokigunez.

[10] Bourbaki and many others always put a central question to any new mathematical gadget: "What are the morphisms?" Structure inevitably leads to morphisms for Bourbaki and everyone else. [Mac Lane 1996b, 181. or.].

homomorfismoz osatutakoa, edo **Top** espazio topologikoz eta hauen arteko aplikazio jarraituez osatutakoa. Hauek guztiak kategoria abstraktuaren axioma definitorioak betetzen dituzte. Axioma definitorio hauek, 'estruktura matematiko klase' kontzeptua 'estruktura gordetzen duten aplikazioen bilduma' bezala definitzen ahalegintzen dira. Honen arabera, *kategoria* bat $A, B, C, ...$ objektuz eta $f, g, h, ...$ morfismoz osatuta dago, ondoko baldintzak betez: (i) f morfismo bakoitzak A *domeinu*, eta B *kodomeinu* bakarrak dauzka, eta honela idatziko da: $f : A \to B$; (ii) beste edozein $g : B \to C$ morfismo emanda, $g \circ f : A \to C$ morfismo *konposatu* bakarra existituko da, konposaketa elkarkorra izanik; (iii) B objektu bakoitzak badauka *identitate* morfismo bat: $1_B : B \to B$, konposaketarekiko (ezker eta eskuin) identitatea dena[11].

Batetik esan behar da, aurrez beste era batean definitutako estrukturak erabat karakterizatuak geratzen direla bide honetatik. Hau da, taldearen ohiko definizioa berreskuratu ahal izango genuke **Grp** kategoriaren baldintzetatik. Bestetik, esandako axioma hauek Bourbakiren multzo-teoriazko estrukturak eta hauen arteko aplikazioak aztertzetik eratorritakoa badira ere, haiek orokortzeko balio dutela, axiomak betetzen dituen *edozer* kategoria bat den heinean. Adibidez G talde bat kategoria abstraktu bat bezala interpretatu daiteke, kategoriako objektutzat taldeko elementuak eta hauen arteko konposaketa bezala talde biderkaketa hartuz, taldearen definiziotik elkarkorra eta identitateduna dena. Goian esandakoaren arabera, modu honetan, ez taldea bera, baizik eta bere elementuak ere estrukturadun objektuak bezala ikus daitezke, talde eragiketak definitzen duelarik[12], kasu honetan, taldeko elementuen estruktura *kategoriala*[13]. Objektuek ez dute zertan "elementuz" osatuak egon, edo ez eta morfismoek ere "funtzioak" izan[14]. Horrela bada, garai bateko estruktura Bourbakiarrek kategoria klaseen jatorrian egon eta adibide garrantzitsuak eskaintzen badizkigute ere, estrukturaren kontzepzio berria ez da horietara mugatzen. Bour-

[11] Ikusi [Awodey 2007] kategoria teoriako oinarrizko definizioak ikusteko.
[12] Hau da, objektuen arteko gezien aljebrak.
[13] Taldeak lukeen estruktura *Bourbakiarrarekin* kontraposizioan.
[14] "Morfismo" hitzak izan ditzakeen iraganeko konnotazioak ekiditeko, eta kontzeptua 'psikologikoki askatzeko' *gezi* hitza ere oso zabaldua dago literatura kategorialean.

bakiarrez gain beste estruktura batzuentzat ere oinarri uniforme bat jartzeko eta, ondorioz, estruktura desberdinen arteko erlazioak modu zuzenean azaleratzeko balio izan du kategoriaren nozioak.

Aurrera jarraituz, Awodeyk, Kategorien teoriak bi objektuk *estruktura bera* izatearen ideia metateorikoa argitu eta sinplifikatzen duela erakusten digu. *Estruktura klase bera* duten bi gauzak ez dute zertan, *estruktura bera* izan, bi taldek estruktura bera izan beharrik ez duten moduan. Zentzu honetan kategorien teoriak, edozein kategoria edo 'estruktura klaseren' baitan, estruktura bera izatearen nozio intuitiboa inongo anbiguotasunik gabe zehazten du *isomorfismo* kontzeptua erabilita. Edozein kategoriatan $f : A \to B$ morfismo bat *isomorfismo* bat dela esaten da, existitzen bada $g : B \to A$ morfismo bat, aurrekoaren alderantzizkoa dena konposaketarekiko, hau da, $g \circ f = 1_A$ eta $f \circ g = 1_B$ egiaztatzen duena. Horrela, bi objekturen artean isomorfismo bat badago, *estruktura bera* dutela esango dugu. Definizio honen bidez, estruktura bera duten objektuek propietate estruktural desberdinik izatea ekiditen da, propietate hauek isomorfismoen bidez gordetzen direnak izanik. Estrukturalki desberdinduezinak diren objektuak dira, hemen, *estruktura bera* dutenak. Finean, isomorfismoek gordetzen duten hori da *estrukturala*.

Isomorfoak diren bi talde estrukturak, aldiz, zerikusi gutxi izan dezakete beren multzo teoriazko eraikuntzari dagokionean. Era honetako desberdintasunak, ez dira matematikoki errelebanteak izan ohi[15]. Baina isomorfismoek gordetzen dituztenak ez diren heinean, kategorien teorian ez dira errepresentagarriak. Hau da, termino kategorialetan errepresenta daitezkeen ezaugarri bakarrak, isomorfismoek gordetzen dituztenak, estrukturalak dira. Matematika kategoriala, hortaz, matematika estrukturala egiteko berme bat da. Ez dago kategorialki estrukturalak ez diren propietatei buruz hitz egiterik. Estrukturarekin lotutako problemak ebazteko kontesturik egokiena eskaintzen du hainbestean kategorien teoriak.

[15]Gogoratu [Benacerraf 1965].

Awodeyk kategorien teoriaren baitan, ZF-k matematikarako eskaintzen duenaren antzeko oinarritzeak aurki daitezkeela dio, adibiderako *Categorical Set Theory* edo multzo abstraktuen kategoria gogora ekarriz, kontuan izanda hori topos elemental bat dela hain zuzen ZF multzoen toposa. ZF-n modelatu daitekeen edozein arrazonamendu matematiko garatzeko marko estruktural bat eskaintzen omen du CST-k, nahiz eta erlazio estrukturalak agerian jartzeko modurik egokiena ez den izango seguruenik.

Lehen ere aipatu dugu estruktura klase desberdinen arteko hizkuntza homogeneizatzeko eta horrenbestez beraien artean egon daitezkeen harremanak azaleratzeko balio izan dutela kategoriek. Hau izango da seguruenez metodo kategorialek eginiko ekarpenik handiena ikuspegi filosofiko batetik. Estruktura klaseak erlazionatzeko gai izateak, estruktura jakin bateko problema jakin bat beste estruktura klase bateko problema jakin batekin erlazionatzeko aukera ematen baitu. Posible da estruktura berriak jatorrizkoak ez zeuzkan tresnak eskaintzea, problema berri hori soluzionatzeko eta estrukturen arteko erlazioen bidez, jatorrizkoari argi egiteko, edo kasurik onenean erabat soluzionatzeko. Horixe da, adibidez, topologia aljebraikoak egiten duena, espazio topologikoen sailkapena hauen homotopia, homologia nahiz kohomologia taldeen funtzioan ebatziz. Espazio topologiko bati, hau karakterizatzen duen, eta ondorioz berreskuratzeko aukera ematen duen, talde bat erlazionatzen badiozu, eta gero talde honen propietateak aztertzen badituzu, jatorrizko espazio topologikoaren zein ezaugarriri, honi erlazionatutako taldearen zein ezaugarri dagokion ikusteko gauza izanik, espazioaren taldearen azterketa erresolutiboa izan daiteke. Estruktura klase bateko objektu baten gainean, beste estruktura klase bateko objektu bat eraikitzearen prozesuek, *funktorearen* kontzeptua determinatzen dute. Funktore hitza erabili gabe ere oso praktika arrunta da hau gaur egungo matematikan.

Kategorien arteko morfismoak dira funktoreak, bateko objektuak besteko objektuetara eta bateko morfismoak besteko morfismoetara eramaten dituztenak, bidean domeinu, kodomeinu, konposaketa eta identitateak gordez. Horrela, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funktore batek, $f : A \to B$ eta $g : B \to C$, $\mathbf{C}$ kategoriako edozein bi morfismorentzat $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) : F(A) \to F(C)$ eta $F(1_C) = 1_{F(C)}$ beteko dira. Besteak beste, kategoria bateko isomorfismoak beste kategoriako isomorfismoetara daramatzate funktoreek. Honek ondorio garbi bat dauka: $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funktore bakar batek $\mathbf{C}$ kategoriako propietate estruktural asko lortzeko balio du. Edonon aurki daitezke funktoreak matematikan eta, jakineko eraikuntza bat, funktore bat bezala interpreta daitekeela konturatzeak, kasu konkretu horretan funktoreen teoria orokorra aplikatzeko aukera ematen du.

Behin funktoreak definituta posible da hauen kategoriak kontsideratzea, hau da, objektutzat funktoreak dituzten kategoriak, morfismoak, funktoreen artekoak izanik. $\mathbf{C}$ eta $\mathbf{D}$ kategorien arteko funktoreen kategoria, notazio esponentziala erabiliz $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ denotatu daiteke, multzo teorian aplikazioen multzoak denotatzeko ohitura jarraituz. Horrela F eta G, $\mathbf{C}$-tik $\mathbf{D}$-rako edozein bi funktore emanda, hauen arteko $\alpha : F \to G$ morfismo bati *transformazio natural* deitzen zaio. $\mathbf{C}$-tik $\mathbf{D}$-rako funktoreen arteko transformazio natural bat azken finean, $\mathbf{C}$-ko A objektu bakoitzari $\mathbf{D}$-ko $\alpha_A : FA \to GA$ morfismo bat egokitzen dion erregela bat da, aldi berean $\mathbf{C}$-ko edozein $f : A \to B$ morfismo emanik, ondoko diagrama trukakorra egiten duena, hau da, $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f)$ betetzen duena:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\alpha_A} & GA \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ FB & \xrightarrow{\alpha_B} & GB \end{array}$$

Definizio korapilatsua ematen badu ere, erraz aurki daitezke adibideak. Adibidez, K gorputz baten gaineko V bektore espazio bat emanda, $\mathbf{Vect_K}$ kategoriatik $\mathbf{Vect_K}$ kategoria berbererako bi funktore hartu ditzakegu: lehenbizikoa identitatea, $1_{\mathbf{Vect_K}}$ denotatuko duguna, eta bigarrena *funktore biduala* deituko duguna. V K gaineko bektore espazio bat kontsideratzen badugu, honen bektore espazio *duala* definitzen da, aldi berean K gaineko bektore espazio bat dena:

$$V^* = \{f \mid f : V \to K \text{ aplikazio lineala}\}$$

Baina, noski, eraikuntza hau K gaineko edozein bektore espazioren gainean egin daitekeenez, posible da V-ren dualaren dualaz hitz egitea, hau da, bidualaz. Beraz, K gaineko edozein V espazio bektorialentzat, V^{**}, bere biduala eraiki dezakegu. Azken finean $\mathbf{Vect_K}$ kategoriatik $\mathbf{Vect_K}$ kateagoriarako beste funktore bat da eraikuntza hau. Orain honela defini daiteke $\eta : 1_{\mathbf{Vect_K}} \to **$ transformazio naturala. K gaineko edozein V bektore espazio hartuta, hemengo edozein v bektore, eta edozein f aplikazio linealentzat $\alpha_V(v)(f) = f(v)$ hartuz, modu 'naturalean'. Horrela bada α morfismo bat da $\mathbf{Vect_K^{Vect_K}}$ kategorian. Eta dimentsio finituko bektore espazioetara mugatuz gero, isomorfismo bat dela ere ikus daiteke. Dimentsio finituko edozein espazio bektorial bere dualarekiko isomorfoa bada ere, ez da "naturalki" isomorfoa, bidualaren kasuan gertatzen den bezala.

Kategoria isomorfoez hitz egin daiteke, beraien artean $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ eta $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ funktoreak existitzen badira, $G \circ F = 1_\mathbf{C}$ eta $F \circ G = 1_\mathbf{D}$ betez. Eta bada kategorien teorian ezinbestekoa dela ikusi den kontzeptu bat, justu, kategoria isomorfoen kontzeptua orokortzen duena, *funktore adjuntuena*, hain zuzen ere[16]. Bi kategorien artean, kontrako zentzuan doazen bi funktore

$$F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : U$$

adjuntuak direla esaten da

$$\phi : Hom_\mathbf{C}(FC, D) \cong Hom_\mathbf{D}(C, UD) : \psi$$

isomorfismo natural bat existitzen bada. Gainera kasu honetan ikus daiteke $\eta : 1_\mathbf{C} \to G \circ F$ eta $\kappa : 1_\mathbf{D} \to F \circ G$ transformazio naturalek ondoko eran determinatu

[16]Ikusi aurrerago.

daitezkeela:

$$\eta_C = \phi(1_{FC}),$$
$$\epsilon_D = \psi(1_{UD})$$

Ikusi daiteke funktore batek adjuntu bat baldin badu, isomorfismo natural bakarra salbu, modu bakarrean determinatua dagoela. Funktore adjuntuak matematikan leku desberdin askotan agertzen dira, eta sarritan estruktura klase desberdinen arteko erlazio esanguratsuak erakusten dituzte. Galoisen korrespondentzia adjunzio baten adibide bat da, eta topologian agertzen den Stone-Čechen konpaktifikazioa funktore adjuntu batek karakterizatzen du isomorfismoz gaindi. Logikan kuantifikatzaile unibertsala eta existentziala funktore adjuntuak direla ikus daiteke, eta beren propietate nagusiak kategorialki frogatu daitezkeela honetatik.

Matematikan sarritan agertu ohi diren beste propietate batzuk *aplikazio unibertsalaren propietate* deitu izan direnak dira. Adjunzioa adierazteko modu bat baino ez direnak. Kategoria bateko bi objekturen arteko *biderkaketarena* da adibide garrantzitsu bat. **C** kategoria bateko X eta Y bi objekturen arteko biderkaketa, $X \times Y$ denotatutako objektu bat da, $p_X : X \times Y \to X$ eta $p_Y : X \times Y \to Y$, ondoko propietate unibertsala betetzen duten bi morfismok lagunduta datorrena. $f : V \to X$ eta $g : V \to Y$ morfismoez lagundutako edozein V objektu bat izatekotan, $\langle f, g\rangle : V \to X \times Y$ morfismo bakarra existituko da, $f = p_X \circ \langle f, g\rangle$ eta $g = p_Y \circ \langle f, g\rangle$ betetzen duena.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "\langle f,g\rangle"'] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "p_X"] \arrow[r, "p_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Horrela bada, *aplikazio unibertsalaren propietateak*, kasu honetan, domeinu beretik, p_X eta p_Y hurrenez hurren, X eta Yrako aplikazioak, horrelako bikoteen artean 'unibertsalak' direla esaten du. Biderkaketa **C**-n existitzen bada, bakarra izango da isomorfismoz gaindi. Ikusi daitekeenez, nozio intuitibo estruktural baten zehaztapen zorrotza da biderkaketarena. Multzo teorian elkarrekiko isomorfoak diren eraikuntza desberdin asko onartzen ditu bi multzoren biderkaketaren nozioak. Definizio kategorialak, edozein objektu motaren arteko biderkaketa (multzoena, taldeena, espazio topologikoena etab.) modu definitiboan definitzen du, kategoriako beste objektu eta hauekiko erlazioekiko funtzioan, multzo teoriazko definizioek dakartzaten propietate irrelebante guztiak saihestuz. Adjunzioetatik eratortzen diren aplikazio unibertsalen propietateek definizio estrukturalen adibideak ematen dizkigute. Definizioa betetzen duen edozein objektu estrukturalki bata bestetik bereiztezina da, gainera, desberdintzen dituen propietaterik ezean bi objektu identikoak kontsideratu beharraz diharduen *Leibnizen legearen* kontra.

Bukatzeko, Awodeyk, bereziki multzo-teoriazkoa dirudien "pertenentzia" erlazioa ere, termino kategorialetan nola definitu daitekeen erakusten du, multzo teoriazko kontzeptuen jatorrian dagoenarekin egiten bada, matematikan agertzen den edozein kontzeptu jasotzeko gauza dela erakutsiz, kontzeptuek duten indarra erakusteaz batera.

Are gehiago, metodo kategorialen bidez lantzerakoan, ordura arte agerian ez zegoen esparru jakin baten ikuspegi estruktural bat lortu daitekeela sostengatzen du, adibide bezala logika eta honen interpretazio kategorialak ekarritako berregituraketa sakona jarriz. Esparru horren egiturazkotasuna hizkuntza eta metodo kategorialetan baino gauzatu ezina dela iradokiz, eta beraz, Kategorien Teoriak matematika berrantolatu, sinplifikatu eta elkartzeko duen gaitasuna agerian jarriz, Bourbakitarrek martxan jarritako proiektuaren erreminiszentzia argiekin[17].

---

[17]Badirudi Awodeyren tesia egiazkoa izatekotan, Bourbakirena moduko proiektu bat iritsi zena baino askoz urrunago irits zitekeela metodo axiomatikoa multzo teoria eta honen metodoekin konbinatu beharrean, kategorien teoria eta honen metodokein konbinatu izan balute. Horixe da baita

Har dezagun Mac Lanek sarritan aipatutako matematikaren antolaketaren kuestioa:

> Multzo teoriak eta logikak Matematikarentzako "oinarritze" estandar bat eskaintzen dute [...] Oinarritze alternatiboak egon daitezkeela adierazi dugu, horietako bat oinarrizko topoien bidezkoa izanik [...] Modu alternatiboan, multzo teoria eta kategoria teoria Matematikaren antolaketarako proposamen bezala ikus daitezke [...] Antolaketa bat ere ez da erabat arrakastatsua [...] Gaur gaurkoz Matematika osoa kontzeptualki antolatzeko bide sinple eta egokirik ez dagoela ondorioztatzen dugu. [18]

Atal honetan eztabaidatu nahi dugun matematikaren oinarriena baino esanguratsuagoa bihurtzen da ikuspegi kategorial batetik. Mac Lanek ez darabil Bourbakiren metafora arkitektonikoa, ez eraikinarena, eta ez hiriarena, matematika deskribatzeko. Horren ordez matematikaren antolaketarekin lotutako sarearena baizik[19]:

> Gogor lotutako sistema formal, axioma sistema, erregela eta loturen sare landu bat bezala ikusten dugu matematika.[20]

Beste hitz batzuekin esanda, badirudi matematikaren oinarrien ideia, multzo-teoriazko matematika estrukturalarekin lotutako metafora arkitektonikoari zor zaion bezala, (kategoria-teoriazko) matematika funktorialarekin lotuta agertzen zaigun sarearen metaforak, ez eraikinaren oinarrietara, baizik eta sarearen antolaketara bideratzen gaituela. Sarearen kasuan ez du zentzurik oinarrietaz hitz egiteak. Estrukturalismo

ere [Cartier 1998]-ek iradokitzen duena.

[18] Set theory and logic provide a standard "foundation" for Mathematics [...] We have indicated that there can be alternative foundations, one such being that by elementary topoi [...] Alternatively, set theory and category theory may be viewed as proposals for the organization of Mathematics [...] Neither organization is wholly succesful [...] We conclude that there is as yet no simple and adequate way of conceptually organizing all of Mathematics.[Mac Lane 1986, 406-407 or.].

[19] Sare hori maila desberdinetan deskribatzen saiatzen da [Mac Lane 1986] sare itxurako diagramak erabiliz.

[20] We view Mathematics as an elaborate tightly connected network of formal systems, axiom systems, rules and connections.[Mac Lane 1986, 417. or.].

kategorial ez fundamentista defendatzen dutenek ere, ez dute matematika eraikuntza bat bezala irudikatzeko ohiturarekin bat egiten. Ados gaude beraiekin horretan. Hala ere, eta aurreko kapituluan Cartierrek eginiko Bourbakiren kritikarekin lotuz, matematikako zenbait adar bai hizkuntzan eta bai kontzeptuetan kategorien teoriari ondo egokitzetik ez dugu uste ikuspegi hau matematika osora zabal daitekeenik edo beraiek eusten duten moduan, gaurko matematikan nagusia denik. Matematikaren ikuspegi murriztaile batetik baino ezin daiteke hori sostengatu. Matematikaren zati askotan multzo teoriazko kontzeptu eta metodoek ezinbestekoak izaten jarraitzen dute. Eta matematikaren ikuspegi kategorial honekin bat egin ezin badugu ere, badira onargarriak iruditzen zaizkigun puntu batzuk. Horien artean nagusiena agian, funktorrek gaur egungo matematikan betetzen duten paper garrantzitsuarena. Baina 3.2 atalean hitz egingo dugu honi buruz.

Bestetik, oinarritzearen bideari eutsiz, Mac Lanek aipatutako matematikaren oinarritze kategorial batek gaur matematikarien artean zabalduena izaten jarraitzen duen multzo teoriazkoa ordezkatzeak lekarzkikeen abantailak garrantzitsuak izan daitezkeela pentsatu izan dutenak ere badira. Horiek ikusiko ditugu aurrena.

3.1.3 Estrukturalismo kategorial fundamentista

Kategorien teoriaren sorreran multzo teoriaren sorreran gertatzen zenaren kontrara matematikaren oinarri izateko inolako asmorik ez zegoela ikusi dugu lehenago. Aljebra eta topologiako nozio tekniko batzuk zehaztu eta zelai matematiko desberdinetako emaitza garrantzitsuak orokortzeko asmoa zegoen teoria honen jatorrian. Hirurogehigarren hamarkadatik aurrera ordea Lawvereren lanekin hasita matematikaren oinarrietan paper garrantzitsu bat joka dezakeela pentsatu izan dute zenbait matematikarik. Ordurako, gorago aipatu dugunez, kategorien teoria, Groethendieck eta Kanen eskutik, bigarren garapen fase batean sartua zegoen, matematikaren alor batzutara ondo egokitzen zen hizkuntza bat izatetik harago. Posible zen hainbat kontzeptu matematiko definitzea, nahiz, matematikaren adar desberdinak (topologia aljebraikoa, aljebra homologikoa edo geometria aljebraikoa, kasu) karakterizatzea kategorien hizkuntzan. Baina Lawverek areagotu egin nahi izan zuen kategoria teoriaren irismena. Logika eta multzo teoria, edo multzo teoria erabiliz defini zitekeen edozein gauza kategorialki definitu beharraz hitz egin zuen. Matematikaren oinarrien azterketa kontzeptuala egiteko abiapunturik egokiena kategorien teoriak ematen zigula esan zuen.

Fisika teorikoan murgilduta zebilen Lawvere kategorien teoriarekin interesatu zenean. Konkretuki mekanika jarraituarentzako oinarri egokien bila zebilen. Ohiko multzo teoriazko oinarriak, batetik, hainbat problema planteatu eta ebazteko baliagarriak izan arren, bestetik, irrelebanteak ziren eta arazo asko planteatzen zituzten propietateak zekartzatelako ZF ez zen matematikarentzako egokia. Ez ziren egokiak bere irudiko, eta multzo teoriazkoa bezain zorrotza, baina sinpleagoa zen azalpen bat bilatzen zuen. Aljebra unibertsalaren oinarrien inguruan abiatutako ikerketa, matematika osoa kategorien kategoria baten berformulatzeko proposamenarekin bukatu zuen. Hori izan zen Eilenbergen gidaritzapean aurkeztu zuen tesia [Lawvere 1963]. Funktore adjuntuak zehazki definitu eta modu berritzailean erabili zituen Lawverek bere tesian. Teoria aljebraiko bat, funktore bat bezala nola interpretatu daitekeen erakutsi zuen. Eredutzat funktoreak dituen kategoria bat besterik ez litzateke, zentzu honetan, teoria aljebraiko bat. Teoria aljebraikoaren nozioa termino kategorialetan definitzen da, bereziki, kategorien kategoriako propietate kategorialetan. Adibidez, talde teoria kategoria bat bezala deskribatu daitekeela erakutsi zuen, zeinetan talde bat, kategoria horretatik multzoen kategoriarako funktore jakin bat izanik [McLarty 1991, 358. or.].

Ez zen hor amaitu Lawvereen ahalegina, matematikaren oinarritzat balio zezaketen axiomatika kategorial pare bat ere eman zituen: ETCS[21] [Lawvere 1964] eta CCAF[22] [Lawvere 1966], azken hau bere tesiko ideiak formalizatuz eta oinarritzat balio duten kategorien kategoria axiomatizatuz. Lehenbizikoan multzo kontzeptua ikuspegi kategorial batetik birmoldatzen du, matematikaren oinarrian jartzeko. ZF-ren homologo kategoriala izango litzateke hau. Izan ere, hasieran askok pentsatu zutenaren aurka, Lawverek ez bait zuen multzo eta elementu kontzeptuak matematikatik kanporatzerik nahi, hauek matematikan paper garrantzitsu bat jokatzen zutela jakitun. Paper hori, ordea, kontestu kategorialean aztertu eta argitu beharrekoa jotzen du. Kategorien unibertsoa da, Lawvererentzat, edozein kontzeptu matematiko aztertzeko eta argitzeko kontestu egokia, baita multzo kontzeptua ere.

Beranduago, Groethendieckek geometria aljebraikoan toposak erabiltzeko moduan oinarrituta, Tierneyrekin batera topos elementalaren axiomak ezarri zituen. Multzo teoriaren orokorpen bat bezala ulertu zitekeen, eraztunak osoen orokorpen edo $\mathbb{R}$-aljebrak zenbaki errealen orokorpen diren antzeko modu batean. Gerora topos elementalak uste baino irismen handiagoa erakutsi zuen fortzamenduaren eta multzo teoriako independentzia emaitzak aztertzerakoan, adibidez. Matematikaren oinarriei buruzko azterketetarako ere erabili izan da toposen teoria.

Lawvereren ikuspegia ez da monolitikoa izan urte guzti hauetan zehar. Hasiera hasieratik mantenduko duen ideia bat badago ordea, hain zuzen ere, matematikaren oinarritzearen azterketetarako berezko markoa osatzen duela kategorien teoriak. Oinarritzea ez da Lawverentzat matematikaren jatorri absolutua edo justifikazioa bilatzea, bide horretan ekarpenak egiteko balio badezake ere. Lawvererentzat matematikaren oinarritzeaz ari garenean, eremu matematiko bat kategorikoki karakterizatu ahal izateko kontestu egokia eskaintzeaz ari gara, non, eremu horretako kontzeptuen goitik-beherako analisi bat egin ahal izango den. Matematikan unibertsala dena

[21] Elementary Theory of Category of Sets.
[22] Category of Categories As a Foundation.

aztertzen da matematikaren oinarrietan, unibertsala den hori funktore adjuntu bezala agertuko dela onartuta. Matematikaren oinarritzeak, matematikarekin berarekin eboluzionatuko du, eta beraz, ez du zentzurik, matematikaren behin betiko oinarritze baten bilaketak. Ezagutza matematikoaren jatorri historiko/dialektikoak, Lawveren arabera oinarrietarako duen balio erakusten du ondoko pasarteak[23]:

> [...] oinarritze batek esplizitu egiten ditu zientzia baten berezko ezaugarri, osagai eta eragiketak, bai eta bere jatorria eta garapeneko lege orokorrak ere. Hauek esplizitu egitearen asmoa, zientziaren ikasketarako, erabilerarako eta garapenerako gida bat eskaintzea da. Asmo hau ahaztu eta "oinarritze espekulatibo bat, bere horretan, bilatzen duen oinarritze "puro" bat, argi eta garbi ez da oinarritze bat.[24]

Lawererek eztabaida zabaldu ostean ekarpen desberdinak egon dira kategorien teoria modu batean edo bestean matematikaren oinarri moduan ezarri izan dutenak. Errepaso labur bat emango diegu segidan posizio hauei.

Lambekek matematikaren oinarrietan eginiko lana arras da desberdina. Matematikaren oinarrietako posizio filosofiko estandarrak (logizismoa, intuizionismoa, formalismoa eta Platonismoa), goian aipatu dugun erako matematika kategorial edo are, topos-teoriazkoa batekin, nola bateratu daitezkeen ikusten ahalegindu da. Toposak maila handiko tipoen teoriekin identifikatuta, bi gauza erakutsi nahi izan ditu Lambekek. Batetik, topos libre deitutakoek, edo zehatzago, maila handiko tipoen teoria intuizionista hutsak mugatzen duen posizioa, logizismoarekin bateragarria izateaz gain, beste ildoetako jarraitzaile moderatuek bat egiteko modukoa dela. Eta bestetik, Platonista klasikoa aseko duen topos 'absolutorik' ez dela, nahiz Platonista

[23][Landry & Marquis 2005, 13. or.]-en aipatua.

[24][...] a foundation makes explicit the essential features, ingredients, and operations of a science as well as its origins and general laws of development. The purpose of making these explicit is to provide a guide to the learning, use, and further development of the science. A 'pure' foundation that forgets this purpose and pursues a speculative 'foundation' for its own sake is clearly a nonfoundation.[Lawvere & Rosebrugh 2003, 235. or.].

moderatuek edozein topos Boolear onar dezaketela uste izan.

Bere izena sarritan agertu izan den arren, matematikaren oinarrietan zuen posizioa aldakorra izan da Mac Laneren kasuan. Kategorien teoriaren sortzaile izanagatik, kategorien teoria topologia aljebraikoa edo aljebra homologikoarako erabilgarria zen hizkuntza bat zeukaten buruan teoria berria aurkeztu zutenean. Lawveren eraginez honek defendatzen zuen ikuspegira hurbildu bazen ere, ez zuen inoiz bere egin. Aurrerago, toposen agerpenarekin, ondoko aukeratutako topos batek aukeraren axiomarekin eta zenbaki arrunt objektuarekin ZFC-ren alternatiba zilegia osatuko lukeela defendatu zuen, Lawverek 1964an aurkeztutako ETCS programara itzuliz [Lawvere 1964], topos-teoriazko ikuspuntu batekin. ZFC-ren erlatibotasuna agerian jarri nahi zuen honekin, eta ez topos-teoriazko oinarritzeak ZFC-ren aldean abantailak zeuzkanik.

Matematikaren oinarritzearekiko ikuspegia, matematikaren izaeraren ikuspegiak mugatzen zuen Mac Lanen kasuan. [Mac Lane 1986] liburuan azaltzen du luze eta zabal ikuspegi hori zein den. Eguneroko giza jardueretatik (zenbatzea, alderatzea, neurtzea,...) abiatzen diren ideia eta kontzeptu intuitiboak formalizatuz sortutako sarea da matematika, bilatzen zaien funtzioaren arabera denboran eboluzionatzen dutenak. Honi lotuta esan izan du Mac Lanek behin eta berriz, ontologia eta ezagutza matematikoaren inguruko posizio filosofiko klasikoak eta matematikari bilatu izan zaizkion oinarriak ez direla ongi bideratu.

[Mac Lane 1986]-an matematikak ZF-ren erako oinarritze desberdinak onartzen dituela esan zuen. Horien artean bereziki oinarritze kategorialak, kategoriek matematikaren oinarritzean izan dezaketen papera onartuz:

> Baina badira beste aukera batzuk. Adibidez, multzoetarako pertenentzia erlazioa funtzioen konposaketa eragiketen bidez ordezkatzen da sarritan. Honek kategorien gaineko matematikaren oinarritze alternatibo batera garamatza –

> zehazki, funtzio guztien kategorian. Gaurko matematikaren zati handi bat dinamikoa da, L objektu baten eta klase bereko beste baten arteko morfismoei buruzkoa. Morfismo hauek (funtzioak bezala) kategoriak osatzen dituzte, eta horrela kategorien bidez jarduteak bat egiten du matematika antolatu eta ulertzeko helburuarekin. Hori izan beharko litzateke, egiazki, matematikaren filosofia egoki baten helburua.[25].

Oinarrien aniztasuna ikusita, matematikaren antolaketarena kuestio errelebanteagoa izan daitekeela esaten du Mac Lanek Bourbakiren lanari aipamenik egin gabe. Beranduago, ordea, badirudi Mac Lanek Lawvererenn ETCS-ren aldeko posizio bat finkatu zuela, benetazkoa, bakarra edo definitiboa izateko asmorik gabe.[26]

Bellek defendatu izan duen aukera Lambeken posizioarekin erlazionatuta dago. 1981 urtean matematikaren oinarritze kategorialaren aurka hitz egin zuen. Lawvereren erako oinarritzearen inguruko jarrera dialektiko bat hartu izan du, kategoria teoriaren sorrera, konstantea aldagaiaren bidez ordezkatzeko prozesu dialektikoaren adibide argitzat emanez, besteak beste. 1986tik aurrera hasi zen kategorien teoriak matematikaren oinarrietan joka zezakeen papera beste era baten ikusten, toposak eta hauei elkartutako maila handiko tipoen teoria intuizionistak, kontzeptu matematikoen esanahia, maila lokalean besterik ez bada ere, aztertzeko balio dezakeen 'koordenatu sistemen' sare bat eskaintzen duela iradokita. Lambekek ez bezala, ordea, Bellek ez du topos konkretu bat hobesten lan honetarako.

Azkenik Makkairen asmoak teknikoak eta filosofikoak dira, matematikaren oi-

[25]But there are other possibilities. For example, the membership relation for sets often be replaced by the composition operation of functions. This leads to an alternative foundation for Mathematics upon categories – specifically, on the category of all functions. Now much of Mathematics is dynamic, in that it deals with morphisms of an object L into another object of the same kind. Such morphisms (like functions) form categories, and so the approach via categories fits well with the objective of organizing and understanding Mathematics. That, in truth, should be the goal of a proper philosophy of Mathematics. [Mac Lane 1986, 359. or.]

[26]Begiratu [Mac Lane 1998, eranskina], [Mac Lane & Moerdijk 1992, VI.10], [Mac Lane 1992], [Mac Lane 2000].

narrietan. Teknikoki oso kontutan hartzen du topos-teoriazko ikuspuntu batek kategoria teoria berarentzat oinarri egokirik eskaini ezin izateko aukera. Kategorien teoriaren oinarritzeak garrantzia hartzen du ikuspuntu honetatik, eta kategorien teoriari buruzko metateoria kategorial baten izaeraz hausnartzen du. Kategorien kategoriaren deskribapen metateoriko bat ematea da bere asmoa. Horretarako teoriarako lehen ordeneko sintaxi egoki bat FOLDS[27] ([Makkai 1997a], [Makkai 1997b], [Makkai 1997c], [Makkai 1998]), teoria interpretatzeko beharrezkoa den oinarrizko unibertso bat ([Hermida, Makkai & Power 2000], [Hermida, Makkai & Power 2001], [Hermida, Makkai & Power 2002]), eta kategorien teoriarako, eta agian matematika "abstraktuaren" zati handi baterako egokia litzatekeen teoria bat [Makkai 1998] eskaini ditu. Honek guztiak estrukturalismo filosofikoarengan lituzkeen eraginak ere aztertu ditu [Makkai 1998]. Makkairen idatzietan antzeman daiteke gaur matematikariek, estrukturatutako sistemek elkarbanatzen duten estrukturaren funtzioan, estrukturatutako sistema klaseez hitz egiteko darabiltzaten metodo kategorialek matematikaren azalpen kontzeptual egokiago baterako ahalmena gorde dezaketela, berau defendatzen dutenen arabera.

Laburbilduz esan daiteke, batetik, matematikaren oinarritze kategorialaren aldeko posizioen artean, zabaldutako ideia orokorra dela, metodo kategorialek dakarten, kontzeptu matematikoak *goitik-behera* aztertzeko ikuspegia, hauen arteko morfismoen bidez jasoa datorrela. Adibidez, funktore adjuntuek sistema matematiko abstraktuen arteko oinarrizko lotura estrukturalak erakusten dituztela esaten denean. Bigarrenik, esan daiteke, orokorrean posizio hau defendatzen dutenek ez dutela matematikak ZF-ren erako behin betiko matematikaren oinarritze global batean beharrik duenik ikusten, eta matematikan zeregin gehienetarako logikoki ahulagoak diren markoak nahikoak direla. Hirugarrenik, oinarrietako ikuspuntu kategorialak, matematika multzoei "buruzkoa" delako mitoa eraisteko balio duela. Multzoak kasu

[27]First Order Logic with Dependent Sorts, azken batean ZFC-n multzoen hierarkia metakorraren parekoa dena.

batzuetan deskribapenerako egokiak badira ere, ez da beti hala gertatzen. Kategoria tipoak ez dute zertan estrukturatutako multzoen sistemak izan. Eta azken puntu komun bat jartzearren, guztiek era batean edo bestean bere egiten duten *kontestuaren printzipioa* aipa dezakegu: kontestu kategorialetan kontzeptu matematikoak karakterizatzeko erabiltzen den *goitik-beherako* ikuspuntua hartzen da , hain zuzen ere, kontzeptu matematikoek “elkarbanatutako estruktura”, beraien artean existitzen diren morfismoen arabera aztertzeko bitartekotzat.

Estrukturalismo kategorial fundamentistak bere bidea egiten jarraitzen du azken urte hauetan multzo teoriazko ZF erako axiomatikak alboratzeko proposamen andana eskainiz. Badira ordea posizio hauen aurrean matematikaren multzo teoriazko oinarritze klasikoaren alde egiten dutenak. Matematikaren multzo teoriazko eta kategoria bidezko oinarritzeen arteko eztabaida ez da gaurkoa. 1977 urte inguruan Mac Lane eta Fefermanen arteko eztabaida da horren lekuko [Feferman 1977]. Ikusiko dugunez azken urteetan eztabaida honek berpizkunde bat izan du. Eztabaida horren nondik norakoak labur deskribatzen ahaleginduko gara segidan, gure posizioa finkatzen laguntzeko argudioak eskainiko dizkigu eta.

3.1.4 Azken urteotako eztabaidak

Oraindik amaitu ez den eztabaida luze bat berpiztu da azken urteotan, kategorien teoriak matematikan betetzen duen paperaren inguruan, hemen aipatu gabe utzi nahiko ez genukeena. Eztabaidak aurpegi desberdinak ditu, sarritan, autore desberdinek ongi bereiztea lortu izan ez dutena. Hala ere eztabaidaren parte bat, matematikaren oinarritze kategorialarekin zuzenean lotua agertzen zaigu. Egoera pixka bat argitze aldera eztabaida honek izan dituen alderdi desberdinak argitzen ahaleginduko gara.

Matematikaren oinarritze kategorial batek sor ditzakeen arazoak aztertzen ditu Hellmanek [Hellman 2003]. Oinarritze kategorial batetako axiomak (Lawveren CCAF-koak edo ETCS-koak, esaterako), Fregeren eran, egiazkoak, edo Hilberten eran, definitorioak edo aljebraikoak diren galdetzen du, axiomen izaeraren inguruko Frege eta Hilberten arteko eztabaida gogoraraziz[28]. Kategoria abstraktuen axiomek ez ziren, inola ere, ZF-ren erako matematikaren oinarritze kategorial baterako eman. Hain zuzen ere, Lawvererenn berrikuntza ZFC-ren homologo kategorialak kontsidera daitezkeenak formulatzean datza (CCAF edo ETCS), biak ere, teoria axiomatiko fundamentistak. McLartyk ([McLarty 2004], [McLarty 2011]) argudiatzen du, Lawverek jadanik erantzun zituela Hellmanek luzatutako galderak, bere sistema fundazionalei dagokienean, behinik behin. Honen arabera bi eratan ulertu daitezke axioma hauek: interpretazio desberdinak onartzen dituen definizio abstraktu bat bezala, Hilberten bidetik, edo, existitzen diren objektu matematikoei buruzko egiak jasotzen dituzten proposizioak bezala, hauetatik abiatuta matematikako edozein proposizio froga daitekeelarik bide deduktiboak erabilita. McLartyk, gainera, Hellmanek kategorien edo topoien existentzia gobernatzen duten axiomak zeintzuk liratekeen galdetzen duenean, esaterako, Lawveren CCAF edo ETCS erantzun posibleak liratekeela diosku.

Awodeyk [Awodey 1996] ondo dioen moduan, 1945ean Eilenberg eta Mac Lanek luzatutako kategoriaren definizioko axiomak betetzen dituen edozer kategoriatzat kontsideratzen da, ikuspegi aljebraiko-estrukturalista batetik kontsideratu ere. Ez dira ezeren oinarritze bezala kontsideratu behar. Alderantziz, Lawvere, Mac Lane edo McLartyk berak oinarritzat eskainitako ETCS edo CCAF[29] sistemetako axiomak ez dira abstraktuak edo aljebraiko-estrukturalak, betetzen dituen edozein sistemak hauen eredu bat osatzen duelarik. Gauzak horrela, argi bereiztu behar dira, alde batetik, matematikaren alderdi desberdinetan modu diferentean erabiltzen diren eta eredu desberdinak aurkitzen dituzten kategoria abstraktuak[30], eta bestetik, mate-

[28]Ikusi [Shapiro 2005].
[29]Badira gehiago ere.
[30]Taldeekin konpara ditzakegunak, adibidez.

matikaren oinarritzat eskaintzen diren kategoria konkretuak. Hau da, McLartyren iritzian, Hellmanek matematikaren oinarritze kategorialean bilatutako arazo nagusiaren muina.

Hellmanek 1977an Feferman eta Mac Laneren artean sortutako eztabaida ere gogora dakarkigu Fefermanen posizioarekin bat egiteko. Mac Lanen matematikaren oinarritze kategorial baten defentsari erantzunez[31], Fefermanek [Feferman 1977] lehenbizi lehentasun logiko eta psikologikoaren arteko bereizketa egin zuen, eta alde bietako lehentasuna eskaini eragiketa eta bildumari. Baita adibideak eman ere. Esaterako bektore espazio kontzeptuak lehentasun logikoa du transformazio linealaren aurrean. Eta eragiketa eta bilduma kontzeptuek lehentasun logikoa dute nozio estrukturalen aurrean, esaterako, kategoria edo talde kontzeptuen aurrean. Beraz, lehentasun logikoa dute topoien aurrean. Horregatik, ikuspuntu platonista batetik multzo teoria logikoki aurrekoa da kategoria teoriarekiko matematikaren oinarriak jartzerakoan, kontuan izanda Fefermanentzat egungo multzo teoriaren garapen axiomatiko guztiak ez direla beharrezko. Funtsean posizio berdina mantentzen du [Feferman 2013]-an kategorien teoriaren hasieran MacLanek berak proposatutako [Eilenberg & Mac Lane 1945] kategorien teoriaren multzo bidezko murriztea, horretarako multzo teoria operazionala proposatuz[32].

Matematikaren oinarritze kategoriala defendatzen duteneek neurri batean onartzen dute kritika honen zilegitasuna, baina ez dute ondorioarekin bat egiten. Adibide desberdinak aipa ditzakegu. McLartyren arabera [McLarty 2004], zuzena da kategorien teoriak nozio preformal hauenganako duen dependentzia. Baina kategorien teoria orokorra, ETCS edo CCAF bezalako sistema axiomatiko fundazionalekin nahastea egozten die kritika egiten dutenei. Azken hauetan, ZFC-n egiten den bezalaxe esplizituki adierazia dator oinarrizko zein kontzepturen gainean eraikiak dauden,

[31] Esan dugu Mac Laneren posizioa ere aldatuz joan zela. Gorago oinarritzea baino antolaketaren alde egitn zuela ikusi dugu.

[32] Ikusi [Feferman 2009].

existentzia baieztapen argiak eginez. Fefermanen kritikari azken urteotan erantzun dien beste bat da Marquis, hau ere matematikaren oinarritze kategorial baten alde agertu izan dena [?]. Bere ustetan ere Fefermanen kritika zilegia da, are gehiago, egin zen garaian eginda, oraindik kategorien teoriak ez baitzuen gaur duen ez irismen, ez heldutasunik. Marquisen arabera kategorien teoriako metodoak, multzo teoriakoak ez bezala[33] gaur egungo matematika abstrakturako diseinatuak izan ziren. Oinarritze kategorial horretan gaur proposamen moduan indarrean dauden hiru kasu aipatzen ditu, berak matematikaren oinarri kontsideratu ahal izateko sistema batek betetzen dituen baldintzak betetzen dituztenak ETCS [Lawvere 1964], FOLDS [Makkai 1998] eta guztietan berriena Homotopia Tipoen Teoria (HoTT) [Awodey & Warren 2009]. Guztietan ere kategoriek ezinbesteko papera jokatzen dute[34].

McLartyk Mac Lanek matematikaren oinarrietan zuen ikuspegiarekin bat egiten du hein batean. Mac Lane behin baino gehiagotan matematikaren oinarritze kategorial (konkretuki ETCS) baten aldeko agertu bazen ere, ez zuen oinarritze orokor eta definitibo baterako aukerarik ikusten, oinarritzeak matematikarekin batera eboluzionatu behar dutela argudiatuz. Kontzeptu eta metodo berrietara egokitu behar dira oinarritzeak, eta zentzu horretan, oinarritzeek ezin dute balazta-lana egin[35]. Eztabaidatu izan den beste puntu bat, matematikaren oinarritze kategorialen aniztasunarena da[36].

McLartyk Lawvererekin batera, besteak beste, ETCSren alde egiten du oinarritze kategorialen artean, Fefermanen kritika zilegiei egokien erantzuten diena delakoan. ZFC-rekiko alde nagusia, berriz, goian azaltzen ahalegindu garen zentzuan [Awodey 1996], gaur egungo matematika nagusiki kategoriala delako arrazoian bi-

[33] "I am claiming that ZF(C), the specific theory, is not faithful to the abstract approach" [?, 4. or.].

[34] Ikusi [?].

[35] Awodeyk azaltzen duen posizio antifundazionalistarengandik hurbil egon daiteke.

[36] Ikusi matematikaren oinarriei lotutako pluralismoaren inguruan gehiago jakiteko ondoko erreferentzia [Hellman & Bell 2006].

latzen du, hau da, matematikarien eguneroko metodoekiko hurbilago dagoela ZFC baino [Lawvere & Rosebrugh 2003]. Horren adibide moduan [Lang 1965] aljebrako testuliburu ezaguna aurkezten du, non kategorien terminologia esplizituki erabili gabe, isomorfismoz gaindiko estruktura aljebraikoen, propietate kategorialen bidezko deskribapen zehatzak ematen diren, bereziki aplikazio unibertsalen propietateak. Multzo teoria ez da ez definitzen, eta are gutxiago axiomatizatzen liburu honetan. ZFC-ren zantzurik ez da inondik ageri. McLartyk [McLarty 2008] argudiatzen du [Lang 1965] ETCS-ren metodoetatik hurbilago dagoela, eta hori dela matematikarien artean nagusitu den estioa.

Argigarria da Hellmanek Kategorien Teoriak, Awodeyk [Awodey 1996] iradoki bezala, estrukturalismo matematikoarentzat marko egokia eskaintzen duen galdetzen duenean Awodeyk ematen dion erantzuna:

> Berehalako erantzuna honakoa da: "bai, noski". Hellmanek [Hellman 2003] artikuluan erreferentzia egiten dion [Awodey 1996] nire artikuluan, estrukturalismo "matematikoa" eta "filosofikoa" bereiztu nituen; lehenbizikoak, gaur ohikoa den, matematika praktikatzeko modu "abstraktu" jakin bati egiten dio erreferentzia; bigarrenak, honen interpretazio filosofikoari. Ziur aski Hellman bat etorriko da kategorien teoriak matematika moderno, abstraktuaren praktikarako marko bat (hain zuzen ere, gaur gaurkoz nagusi dena) eskaintzen duela esatearekin.[37]

Hau da, gaur egun matematikariek duten lan egiteko moduak, inplizituki izan badaiteke ere, ikuspuntu kategorial bat gordetzen duela. Badira ikuspegi hau defendatzen duten beste batzuk ere. Hau da, adibidez, McLartyk [Lang 1965] testuliburuari buruz esaten duena:

[37] The straightforward answer is: "yes, obviously". In my paper [Awodey 1996], to which Hellman [Hellman 2003] is referring, I distinguished between "mathematical" and "philosophical" structuralism; the former refers to a certain, now typical, "abstract" way of practicing mathematics; the later, to its philosophical interpretation. Hellman will surely agree that category theory provides a framework (indeed, the currently dominant one) for the practice of modern, abstract mathematics.[Awodey 2004].

> Testuliburu baten adibide bezala eragin handiko [Lang 1965]-k isomorfismoz gaindiko estruktura aljebraikoen deskribapen zehatzak eta osoak ematen ditu hauen propietate kategorialak erabiliz, bereziki hauen *aplikazio unibertsalen* bidez... Matematikariek praktikan kategorien bidea hautatu izana ukatzea zaila litzatekeela pentsatzen dut.[38]

McLartyk bere baieztapena 2008ko idatzian oinarritzen du, guk ez dugu bertan, halako baieztapen definitiborik egiteko argudio nahikorik ikusi. Are gehiago Langen aipatutako lana begiratuta ikus daiteke, egia dela kategoria eta funktoreei buruzko atal bat dakarrela taldeei buruzko lehenbiziko kapituloan, agertuko diren estruktura desberdinen teoriak ikuspegi homogeneo baten barruan kokatuz. Propietate unibertsalak ere erabiltzen ditu eta hauei lotutako gezi diagramak, baina multzoak ere badarabiltza, nahiz eta McLartyk dioen moduan ZF sistema gogora ekartzen duen arrastorik ez topatu. Azken finean aljebrari buruzko liburu bat izanik, multzo teoriari dagozkien kontzeptuen tratamendu informal bat ematen du. Gehiegizkoa iruditzen zaigu McLartyren baieztapena, ematen duen justifikaziorako.

> Ezein antolaketa ez da erabat arrakastatsua. Kategoriak eta funktoreak nonahi aurki daitezke topologian eta aljebraren zati batzuetan, baina ez dira oraingoz analisiaren gehiengora hain ondo egokitzen.[39]

Bourbakiri buruz hitz egiterakoan esan genuen moduan Kategorien teoria da gaur egun daukagun estrukturen teoria formal nagusia. Horrek ez du esan nahi ordea, matematika, Bourbakik uste zuen bezala estrukturen zientzia denik. Eta matematikan estrukturek paper garrantzitsua jokatu arren, kontzeptu zentrala hau ez baldin bada, kategorien teoriak ez du zertan matematikaren muina osatu. Aurrerago helduko

[38] As a textbook example the influential Lang [Lang 1965] gives many full, precise descriptions of aljebraic structures up to isomorphism by their categorical properties, specifically their *universal mapping* properties... But I think it would be hard to deny that mathematicians have chosen the categorical approach in practice.[McLarty 2008], [McLarty 2011]-n aipatua.

[39] Neither organization is wholly succesful. Categories and functors are everywhere in topology and parts of aljebra, but they do not as yet relate very well to most of analysis. [Mac Lane 1986, 406-407 or.].

diogu, berriz, soka-mutur honi.

Awodeyren ustez ez da egokia matematika erlazio estrukturalek erlazionatzen dituzten objektu berezi batzuen unibertso baten gainean oinarritua ikustea, ZFC-n multzo teoria axiomatikoan gertatzen den bezala. Eta matematikarentzako oinarritze bat edo beste bat nahiago izan beharrean[40] kategorien teoriak, matematikak oinarritze beharrik ez duela erakusteko balio duela defendatzen du; Mac Lanen hitzak baliatuz esaten du “oinarritze kategorialaren” inguruko eztabaida oinarriak eraikitzeari buruzkoa baino zubiak eraikitzeari buruzkoa dela.

Mac Lanek matematikaren oinarritzeari buruz zeukan ikuspegiarekin loturak antzeman dakizkioke ikuspegi honi ere. Bai Awodeyk [Awodey 2004] eta bai McLartyk [McLarty 2011] bat egiten dute ondokoan: gaur egun kategorien teorian lanean diharduen inork ez du matematikaren behin betiko antolamendu edo oinarririk[41] aurkitzerik espero, matematika etengabe eraldatzen ari delako, eta gehienez ere behinbehineko antolaketa proposamenak eman ahal izango direlako. Horri ezin zaio Awodeyren ustez “oinarritzea” deitu eta , McLartyk, aldiz, oinarritzeak, Mac Lanen zentzuan antolaketa bezala ulertuta, derrigorrean probisionalak, behin behinekoak izan behar dutela ondorioztatzen du.

Awodeyren aburuz ETCS bezalako teoriek, multzo teorian baino ulertu ezin ziren kontzeptuak kategorien teoriak nola jasotzen dituen erakusteko balio dute. Matematika beste era batera egin daitekeela erakusteko. Hain zuzen ere, multzoen teoriak, Awodeyk kritikatzen duen behin betiko oinarritzearen ideia[42] auspotzeko balio duten bezala, bestelako bide bat eskaintzen omen du kategorialki egiten den matematikak.

[40]Hellmanek irekitako eztabaidaren beste adarrak erepresentatzen duen eztabaida, goraxeago esan bezala.

[41]“True topos” esaten du Awodeyk.

[42]Matematikaren metafora arkitektonikoari lotuta dagoela dioguna.

Honi lotuta, Hellmanek [Hellman 2003] azpimarratutakoa, kategorien oinarritzearen inguruko problema ontologikoa dela dio Awodeyk. Estrukturalismo kategorialari zerbait faltako balitzaio bezala, eta zerbait hori, bere estrukturalismo modalarekin lotzeko balio dion *domeinu handien teoria* izanik[43]. Awodeyren ustez gaizki bideratutako eztabaida da hori. Matematika kategorialaren ulermen egoki batek, estrukturalismo filosofiko egoki baterako bidea ematen omen du, Hellmanen erako konponketen beharrik gabe.

Matematikaren oinarritze orokor klasikoaren arabera, objektu matematiko guztiak oinarritze sistema bakarra erabiliz eraiki behar dira. Horretarako, batetik, eguneroko matematikan beharrezkoak diren talde, espazio etabarrak eraikitzeko adina objektu behar dugu, eta bestetik, eguneroko matematikako inferentzia guztiak bermatzeko lege, erregela eta axioma nahikoa izan beharko da. Ikuspegi honen aurrean Awodeyren estrukturalismo matematikoak teoria edo teorema jakin baterako, soilik, egin nahi denerako beharrezkoa eta errelebantea den 'informazioa edo estruktura" zehaztean datza, erabilitako objektuen determinazio edo ezagutza absolutuen beharrik gabe. Matematikaren parte desberdinetan arrazonatzeko moduak ez dira orokorrak eta uniformeak, baizik eta "lokalak" edo kontestuarekiko, pertsonarekiko nahiz garaiarekiko erlatiboak, baizik. Ez dago panorama konplexu hau unibertso eta inferentzia sistema definitibo batera eramaterik, matematikaren oinarritze orokor klasikoek (ZFC esaterako) egin nahi izan duten moduan.

Batetik, Awodeyk, Matematikak izaera *eskematikoa*[44] duela esaten du. Matematikako edozein teoremak, hau estruktura bati aplikatu ahal izateko, honek bete beharreko aurrebaldintza hipotetikoak ezartzen dituela, garrantzia, estrukturaren

[43]Gure bidetik urrundu egiten dela eta, ez dugu hemen Hellmanek, Fefermanen [Feferman 1977] krikitari erantzunez eta berak defendatzen duen estrukturalismo modalarekin lotuz sortutako *domeinu handien teorema* azalduko. Interesatuta dagoenak [Hellman 2003] eta [Hellman 2005] irakurri behar lituzke.

[44]Matematikaren izaera "eskematikoaren" kontzeptua Mac Laneri zor diola aitortzen du Awodeyk. Bereziki, bere hitzetan, Mac Lane artikulatzen hasi zen estrukturalismo kategorialaren bidetik ([Mac Lane 1992], [Mac Lane 1997]).

zein ezaugarrik duen erakutsiz. Proposizio matematiko oro "Baldin hau-eta-hau orduan beste-hau-eta-beste-hau" itxurakoa dela esanaz jasotzen du ideia hori.

Teorema matematikoek estrukturen propietateak eta hauen arteko erlazioak adierazten dituzte. Teoremen frogek estruktura horiez gain, beste batzuk ere tartekatu ditzakete, logika, multzo teoria edo kategorien teoriak jasotako arrazonamendu printzipio orokorrekin batera (adibidez funktoreak eraikitzen direnean, edo baliokidetasun erlazio bati erlazionatuta zatidura estrukturak kontsideratzen direnean, etab.). Baina ez dute estrukturen izaera modu absolutu batean kontsideratzea eskatzen. Frogapenerako zehaztasun maila konkretu bat interesatzen zaigu, ez handiagoa eta ez txikiagoa. Gainontzean ez dio axola estruktura bat zer den edo zertaz osatua dagoen.

Gainera zehaztasun absolutu falta hau ez da matematikaren ezaugarri kapritxoso bat, matematikaren izaeraren[45] erakusle funtsezkoa baino. Ez da, fundazionalistek egin ohi duten moduan, unibertsalki kuantifikatutako aldagai bat bezala deskribatu beharreko determinazio falta bat, aldagaia mugituko deneko domeinu bat finkatzea eskatzen baitu honek. Hein batean, zenbaki errealei buruzko proposizio orokor baten eta $\mathbb{R}[x]$, koefiziente errealeko polinomioen eraztuneko x indeterminatuari buruzko proposizio baten arteko bereizketaren analogotzat jotzen du Awodeyk[46]. Praktika matematikoarekiko arrotza da erabat fundazionalistek egin ohi duten moduan jokatzea, eta matematikaren izaera eskematikoa kontuan ez hartzetik letorke, hau da, proposizioak modu absolutu baten ulertu behar horretatik. Russellen "typical ambiguity" delakoarengandik hurbil kokatzen du.

Bestetik, estrukturalismoaren eslogan nagusia da, objektu indibidualen izaera berezia irrelebantea dela. [Awodey 1996]-n erakusten ahalegindu zenez, kategorien teo-

[45] Matematikaren izaera eskematikoaren.

[46] Hau da, kasu honetan $\mathbb{R}[x]$ polinomio eraztuna litzateke fundazionalistek, kuantifikatzaileak sartzerakoan, artifizialki mugatuko luketen domeinua. Hasierako proposizioak inondik ere iradokitzen ez duena, eta hasierako proposizioaren baliokidea zertan izan ez duena.

riak, beste inolako *à la Frege* axioma baieztatzaileren beharrik gabe, bere horretan gordetzen du, bigarren puntu hau adierazteko gaitasuna. Multzo teoriak, adibidez, ez duena. Hori horrela izatearen arrazoi nagusia, kategorien teoriaren kontzeptu zentrala den "morfismoari" zor zaio. Eragiketak, erlazioak eta bestelako oinarrizko kontzeptu matematikoak bere gain hartzeko adina malgua den kontzeptua, bide batez[47].

Ohiko oinarritzearen "behetik-gorako" erlaziozko estrukturalismo bat baino gehiago, estrukturalismo kategoriala, Hilberten erako axioma aljebraiko-abstraktuarekin bidearekin lotutako, "goitik beherako" jardun batek ezaugarrituko luke. Behetik gorako gauzen hierarkiarik gabe. Ez genuke, gauzarik, atomorik beharko horrela. Ez da *erlazioa* estruktura kategorialen oinarrizko nozioa. Erlazio batek erlazionatutako gauzak eskatzen dituen bezala, kategorietan oinarrizko noziotzat morfismoa aukeratuz, oinarrizkoagoa den beste noziorik gabe (axiomatikoki) ondo definitua dagoena eta erabat autonomoa kontsidera daitekeena, hauetatik nahi dugun edukiaren inguruko estrukturak eraiki ditzakegu, hauetan zer *gauza* dagoen galdetzeko beharrik gabe. Shapirok oinarritze ontologiko [Shapiro 2011] deitzen duenetik urruntzen da horrela Awodey. Matematikak ez du lehengai konkreturik, ez da honi edo hari buruzkoa.

Eta gorago esan dugun moduan Awodeyk matematikaren "azken oinarritzerik" espero ez duen arren, kategorien teoriak badauka matematikaren izaera azaltzerakoan, gaur egun behinik behin, matematikaren beste alor batzuk ez duten paper bat. Matematikaren aipatutako izaera eskematikoa agerian uzteko gaur daukagun biderik egokiena dela uste du. "Baldin hau-ta-hau, orduan beste-hau-ta-beste-hau" erakoak diren proposizio matematiko eskematikoak formulatzeko markorik egokiena eskaintzen du kategorien teoriak. Gaur egungo matematikarentzako hizkuntza optimoa bailitzan[48].

[47]Ikusi [Awodey 1996] morfismo hitzak eskaintzen duen aberastasun kontzeptualaz jabetzeko.

[48]Shapirorentzat hau esatea, hein batean bederen, kategorien teoria matematikaren oinarria dela esatea litzateke, nahiz eta, onartzen duen moduan, matematikaren oinarritze klasiko bezala ulertu

Matematika modu batean edo bestean kategorien teorian oinarritzen ahalegintzen direnek Fefermanek 1977an luzatzen zien kritikak erantzunik gabe jarraitzen duelako ustea dugu: eragiketa eta bildumaren kontzeptu orokorrak nozio kategorialen aurrekoak dira. Hau da, ez dago topoietaz edo kategorietaz hitz egiterik era batera edo bestera bi nozio hauei erreferentziarik egin gabe. oinarritze kategorialen aldekoek argudio hauei aurka egin ezinik dabiltza. Hona duela gutxiko pare bat adibide:

> Edozein kasutan, matematika modernoak, kategorien teoriak, eta Fefermanek bildumak transformazioekin batera hobeto ulertzen diren ustea elkarbanatzen dute. Inork ez ditu transformazioak bildumetara erreduzitzen, ZFC-k egiten duen moduan.[49]

Fefermanen argudioa indargabetu ezin duenez, badirudi, McLartyk bat egiten duela harekin. Ikusten ez dena da matematikaren oinarritze kategoriala defendatzen duen batentzat, baldintza hauek onartzeak dakarren ondorioa bere egiten duenik McLartyk. Marquisena dugu bigarren adibidea:

> Nire helburua artikulu honetan, hain zuzen ere, matematika *abstraktuaren* edozein ikusmolde izanda ere, lehentasuna eragiketa eta bilduma nozioetan jarri beharra argudiatzea izango da. Hala ere, Fefermanek esandakoaren aurka, marko fundazional horretan kategoriek ezinbesteko paper bat jokatzen dutela argudiatuko dut. Bestela esanda, kategoriak bilduma eta eragiketa nozioen kontzepzioaren formalizazio alternatibo baten nukleoa osatzen dutela diot.[50]

denetik urrundu.

[49]In any case, modern mathematics, category theory, and feferman share the view that collections are best understood in coordination with transformations. None of them reduce transformations to collections, as ZFC does. [McLarty 2013, 83. or.]

[50]My goal in this paper is to argue that indeed, on any view of *abstract* mathematics, priority must lie with notions of operation and collection, but that, contrary to what Feferman claimed, categories play an indispensable role in such a foundational framework. Put differently, I claim that categories are at the core of an alternative formalization of the naive conception of collections and operations.[Marquis 2013, 51. or.]

Marquisen argudioak ere azken batean Fefermani arrazoia emateko gehiago balio du beste edozertarako baino. Bilduma eta transformazioa formalizatzeko moduarena ez baita kontua, hauen jatorrizko izaera

3.1.5 Ondorioak

Jean Dieudonné Bourbakiren sortzaileetako batek esan zuen:

> Hilbert eta Dedekinden garaietatik, oso ondo jakin izan dugu matematikaren zati handiak logikoki eta modu emankorrean garatu daitezkeela ondo aukeratutako axioma kopuru txiki batetik. Hori da estruktura matematikoaren ideia orokorra eman zuena. Esan dezagun berehala nozio hau kategoria eta funktorearen ideiek ordezkatu dutela, estrukturaren nozioa modu orokorrago eta komenigarriago batean jasotzen duelarik.[51]

Bigarren kapituluan esan dugu Bourbakik Van der Waerdenek egindako aljebraren estrukturazioa matematika osora zabaldu nahi izan zuela estruktura matematikoaren ideia printzipio ordenatzaile bezala hartuta. Multzo teoriazkoak ziren Bourbakiren estrukturak, hau da, estrukturadun multzoak. Multzo gaineko estruktura, Dieudonnék dioenez Hilbert eta Dedekindenekin hasitako metodo axiomatiko modernoaren bidez definitzen da, estrukturaren axiomak zerrendatuz. Bourbakiren estruktura matematikoak bi kontzeptuotan oinarritzen dira, beraz: multzo teoria batetik eta metodo axiomatikoa bestetik. Bourbakiren lanak garrantzia handia izan zuen, bere garaiko matematika bateratu, homogeneizatu eta antolatzeko orduan. Garaiko matematikaren benetako topografoak kontsidera ditzakegu. Gauza izan ziren matematikaren alor desberdin asko aljebratik zetorren estruktura kontzeptuaren arabera kontzeptualki hierarkizatu eta argitu zitezkeela ikusteko. Honetan datza nagusiki

[51] Since Hilbert and Dedekind, we have known very well that large parts of mathematics can develop logically and fruitfully from a small number of well choosen axioms. That is what gave the general idea of the notion of mathematical structure. Let us say immediately that this notion has since been superseded by that of category and functor, which includes it under a more general and convenient form.[Dieudonne 1970, 138. or.].

guk *estrukturalismoa matematikaren barne oinarrietan* deitu duguna. Baina aurreko kapituluan ikusi dugun moduan muga nabarmenak dauzka matematikaren ikuskera honek, besteak beste, [Mac Lane 1996b] artikuluan aipatzen direnak: saiakera ez da iristen ez matematika osora (ez zen hori Bourbakiren asmoa), ez eta matematika puroak jasotzera ere, Bourbakik teorien garapen maila jarri arren horren arrazoi moduan.

Lehen ere esana dugu, historian ahalegin desberdinak egon diren arren[52], Dieudonnék esaten duen moduan, estruktura matematiko kontzeptua hobekien jasotzen duen teoria formala, kategoria eta funktoreen teoria dela. Bide beretik [Cartier 1998]-k Bourbakik kategoria eta funktoreen teoria garaiz bere egiten ez zuela jakin esaten du eta estrukturen teoria formal nagusitzat jotzen duen honen baitan garatu izan balitz irismen handiagoa izango lukeela Bourbakiren lanak, estrukturak eta hauei lotutako morfismoak modu malguago batean landu ahal izango lituzkeelako zelai matematiko desberdinetara, eta bereziki, geometriaren ingurukoetara hobeto moldatuz.

Kategorien teoriak estrukturak eta hauen arteko erlazioak aztertzeko markorik egokiena eskaintzen duen ideia honetatik abiatuta sortu dira guk kapitulu honetan estrukturalismo kategorialaren izenpean aztertu ditugun ekarpen desberdinak. Ikusi dugu kategorien teoriaren estatusa poliki poliki aldatzen joan dela historian zehar, batez ere, bere kontzeptu garrantzitsuenak kontsideratu izan diren *funktore adjuntu* eta *kategoria abeldarren* aurkikuntza eta aplikazioekin. Sortu zireneko kontestu jakinetan terminologia egoki bat sartzearekin "hizkuntza berezi" bat baino ez kontsideratzetik autore batzuen iritziz gaur egungo matematikaren izaera karakterizatzeraino. Ikusi dugu kategorien teoriak matematikan duen papera zein den erabakitzeko orduan iritzi desberdin asko daudela, bakoitzak bere interesetara moldatzen dituelarik. Honen adierazgarria da Hellmanek [Hellman 2003] kategorien teoriak estrukturalismo matematikoarentzako marko egokirik eskaintzen ote duen galdetzerakoan Awodeyk

[52] Ikusi [Corry 1996].

[Awodey 2004] egiten duen zehaztapena filosofoaren eta matematikariaren ikuspegia bereiztuz.

Hori kontutan hartuta bi posizio nagusi bereiztu ditzakegu zehaztasunetan sartu gabe estrukturalismo kategorialaren inguruan. Batetik Awodeyren "working mathematician"-aren estrukturalismo kategorial ez fundamentistaren ildoa izango genuke, gaur egungo matematika kontzeptu eta metodoetan funtsean kategoriala, edo are funktoriala dela defendatzen duena, baina Mac Lanen bidetik[53] matematikak XX. mende hasieran bilatutako moduko oinarritze "arkitektonikorik" ez duela eta, beraz, ez duela behar defendatzen du. Hori baino gehiago, estrukturalismo kategorialaren bidea Bourbakik multzo teoriazko estrukturetan bilatutako printzipio ordenatzailearena dela iradokitzen du Awodeyk. Bestetik Lawvere, Marquis, McLarty eta antzekoen ikuspuntu fundamentistak dauzkagu, bakoitza bere aldakuntzekin. Hauek bat datoz Awodeyrekin gaur egungo matematikaren izaera kategoriala aitortzean. Baina Awodeyk ez bezala topoi elementalen sistema axiomatikoek neurri batean multzo teoriazko ZF-ren muga batzuk gainditzen dituztela defendatzen dute, nahiz eta mateatikak behin betiko oinarritzerik ez duela izango onartzen duten. Topos elemental desberdinen bidezko (ETCS, CCAF,...) ZF erako sistema axiomatikoak proposatzen dituztenak matematikaren oinarritzat, jatorrizko elementuen izaera kategoriala aldarrikatuz, eta multzo teoriazko kontzeptuak, hauen funtzioan definitu beharko liratekeela argudiatuz, Fefermanen 1977ko kategorien kontzeptuak multzoenganako duen dependentziari buelta emanaz.

Matematika kategorien teorian edo topoietan oinarritu nahi duten ikuspegiei Fefermanek [Feferman 1977, Feferman 2013] eginiko kritikarekin bat egiten dugu, bilduma eta eragiketaren nozioak nozio estrukturalen eta ondorioz nozio kategorialen aurretik jartzen dituenean. Fefermanek aipatzen duen lehentasun psikologikoan ez

[53] Behintzat [Mac Lane 1986, Mac Lane 1992, Mac Lane 1996a] lanetan MacLanek erakusten duen posizioarekin.

gara sartuko eztabaida honetara inolako argirik ekartzen ez duelako. Logikoki aurrekoak direla diogunean, nozio estrukturalak definitzeko bilduma eta eragiketa nozioak ezinbestekoak direla esan nahi dugu. Azken batean kategorien definizioan objektuen bildumak eta edozein bi objektu emanda, propietate jakinak betetzen dituzten hauen arteko morfismo edo gezien bildumak postulatzen baitira. “Bilduma” eta “eragiketa” hitzak darabiltzalarik Fefermanek berariaz “multzo” eta “funtzio” hitzak saihestu nahi dituela dirudi balizko aurrelerrokatzerik ez erakusteko. Ez dihardu multzoez eta funtzioez kontzeptu hauen aurrekoak liratekeen ideia orokorrei buruz baino. Matematikaren oinarritze kategorialen aldekoen kritikek ez dute Fefermanen argumentua sendotzea baino lortzen. [Marquis 2013] da horren erakusgarri on bat.

Bide batez, esan beharra daukagu Fefermanek kategorialismo fundamentistari eginiko kritika onartzeak ez gaituela Fefermanen posiziora lerratzen ezinbestean. Matematikarako proposatzen dituen jatorrizko bi nozioen ideia, bildumak eta eragiketak hain zuzen ere, hasiera batean proposamen onargarria dirudien arren, onargarritasun hori ahuldu egiten bait zaio hori behin eta berriz matematikaren oinarri bezala jartzen duenean multzo teoriaren ikuspegi propioak formulatuz. Aurreko kapituluan Bourbakiren multzo teoriazko (kasu hartan ere ikuspegi propio batetik emana Zermeloren axiomatika matematikarako gehigozkatzat joz) estrukturalismoari buruz hitz egin ondoren “eraikuntza matematikoaren” metafora agortuta zegoela erakusten saiatu gara. Hilbertekin eta matematikaren oinarrietako proiektu logizistekin metodo axiomatikoak izandako gorakadaren olatuan indarberritutako metafora honek, batetik, Gödelen ez-osotasun teoremekin, matematikarako erabateko ziurtasunaren ametsa amaitutzat joz, eta bestetik Bourbakiren ahalegin sistematikoak matematika bere baitan hartzeko erakutsitako ezintasuna dela eta, goia jo zuela pentsatzen dugu. Ezinezkoa da gaur egungo matematika eraikuntza bat bezala irudikatzea: jatorrizko kontzeptu eta axioma gutxi batzuetatik gainontzeko guztia deriba daitekeela. Aurrerago ere esan duguna errepikatuko dugu: matematikak ez du oinarririk zentzu “arkitektonikoan”. Fefermanen kritiken helmugan daudenek eta Fefermanek berak matematikaren ikuspegi hau mantentzen dutelakoan nago.

Azkenik matematikak oinarririk behar ez duela defendatzen duen kategorialismo ez fundamentistaren kasua daukagu, gaur egungo matematikak izaera kategoriala duela eta terminologia eta metodologia kategorialak matematikaren ikuspegi egoki bat emango lukeela defendatzen dutenak. Gure ustez ordea garrantzitsua dena ikuspegi kategoriala baino, honek iradoki dezakeen funtzioen errelebantzia da azpimarratu beharrekoa. Awodeyk berak Mac Lanek egin bezala aitortzen du kategorien teoriaren kontzeptu funtsezkoa funktorearena dela, hau da, matematikan aurki daitezkeen estruktura desberdinek dituzten erlazio eta elkarreraginak agerian jartzen dituzten konstrukzioak. Horrez gain kategorien teoriak dakarkigun beste ikasgai garrantzitsu bat ere bada: estrukturetan funtzioek duten garrantzia agerian uztearena, Bourbakik egin ohi zuena baino modu ikusgarriagoan. Funtzioek estrukturetan duten errelebantziaren ideia eta estrukturen arteko erlazio eta elkarrekintzen ideia hartuko ditugu guk gaur egungo matematikaren izaera azaltzeko bi osagai nagusi bezala, kategoria teoria beraren garapen guztiak aintzat hartzeko premiarik gabe.

3.2 Funtzionalismo Estrukturalista

3.2.1 Geometria ez-euklidestarrak eta Kleinen *Erlanger Programm*

1.2.1 atalean hitz egin dugu Euklidesen *Elementuei* buruz. Garaiko ezagutza geometrikoen esposizio sistematiko bezala deskribatu dugu lan hori. Definizio, nozio komun eta axiomak zerrendatu ostean, logikaren erregelak erabiliz proposizioak banan banan deduzitzen zirela ikusi dugu. Milaka urtetan matematikariek ez zuten zalantzan jarri *Elementuen* zilegitasuna.

Baziren ordea zalantzak sortzen zituzten puntuak Euklidesen lanean. Horien artean nagusia bosgarren postulatuari buruzkoa zen. Aurreko lau axiomak laburrak eta intuitiboki ulertzeko errazak baziren, bestelakoa zen egoera bosgarrenaren kasuan. Hau da gutxi gorabehera, bosgarren axioma horrek esaten duena: *Bi zuzen ebakitzen dituen zuzen batek, alde berdineko barne-angeluen batura bi angelu zuzenena baino txikiagoa bada, bi zuzenok mugagabeki luzatuta, angeluen batura bi angelu zuzen baino txikigoa den aldean ebakiko dira*[54]. Eta zalantzak sortzen zituen, beste lauen sinpletasuna eta berehalakotasunarekin alderatuta, bosgarren honek zuen konplexutasunak, postulatu bezala hartu beharrean beste postulatuetatik deduzitua izan zitekeela uste izatera zeramalako, hau da, postulatu bat ez teorema bat zela uste izatera. Mende luzeetan zehar ahalegindu ziren eskatutako froga horren bilaketan, baina ez zuten halakorik aurkitu.

Poliki-poliki matematikariak Euklidesen bosgarren postulatua beste lauekiko independentea zela konturatuz joan ziren eta ondorioz, honen ordez bestelako postulatuak ezarriz, euklidestarraz bestelako geometriak posible zirela. Lobachevsky errusiarra izan zen 1829an zentzu honetan lehenbiziko emaitza argitaratu zuena [Lobachevsky 1829]. Handik lasterrera, 1832an, eta modu independentean, antzerako emaitza bat publikatu zuen Bolyai hungariarrak [Bolyai 1832][55]. Hauek izan ziren lehenbiziko geometria ez-euklidestarrak, hau da, Euklidesen bost postulatuetatik bestelakoak ziren postulatuetan oinarrituta zeuden geometriak. Gerora beste batzuk ere ezagutu diren arren, Lobachevsky, Bolyai et Gaussek aurkitutako geometria honi *geometria hiperbolikoa* deitu izan zaio. Definizioz, geometria hiperbolikoa, Euklidesen sisteman zuzen paraleloen postulatua honen ukazioagatik ordezkatuz lortzen da[56]. Geometria euklidestarraren lehen orokorpen handia ekarri zuen geometria

[54]Gaur egunean modu sinpleagoan honela enuntziatu ohi da zuzen paraleloen axioma ezaguna: *Edozein zuzen bat eta honen gainean ez dagoen edozein puntu emanda, zuzen bakarra existitzen da puntu horretatik pasatuz hasierako zuzenarekiko paraleloa dena.* Hilberten paralelismoaren axioma deitzen zaio formulazio honi.

[55]Gaussek adierazi zuenez, Bolyairen emaitzak ezagunak zitzaizkion. Hori dela eta Gauss ere aipatu ohi da Geometria ez-euklidearren sorreran. Ikusi [Greenberg 1980].

[56]Zehatzago hitz egin daiteke, Hilbertek 1899ko bere *Grundlagen der Geometrie* [Hilbert 1899], geometriaren oinarrien inguruko lanean aurkeztutako sistema axiomatikoan oinarrituz. Euklidesen

hiperbolikoak.

Riemannek 1854ko bere tesi famatuan, orain arte aipatutako geometria euklidear eta hiperbolikoez gain, *geometria eliptiko* deitu izan direnez ere hitz egiten du. Euklidesen bosgarren axioma ordezkatzeko, edozein zuzen eta honen kanpoko edozein puntutatik aurrekoarekiko zuzen paralelorik pasatzen ez dela kontsideratzea, geometria hiperbolikoaren modu homologoa litzatekeena, ez da kasu honetan nahikoa. Izan ere, axioma hau Hilberten gainontzeko axiomekin kontraesanean baitago. Hori dela eta, paralelismoaren axiomaren bertsio 'eliptikoa' onartu nahi izanez gero, gainontzeko axioma sistema modifikatu beharko litzateke, Riemannek buruan zeukana adierazteko[57]. Bada geometria eliptikoaz hitz egiteko beste modu bat ordea. Gaussen kurbaturaren kontzeptua erabiliz, hain zuzen ere. Gaussen kurbatura[58] konstantea duten hiru sistema geometriko posibleak, geometria euklidestarra, geometria hiperbolikoa eta geometria eliptikoa baitira. Riemannek Gaussen kurbatura konstantea duten geometria guztiak zilegitasun bera dutela postulatu zuen 1854ko bere tesian [Yaglom 1988].

Kleinen (1849-1925) garairako beraz, espazioaren nozio desberdinak existitzen ziren, Riemann eta Lobachevskyk, besteak beste, geometria ez-euklidearrei atea ireki

lanean agertzen ziren akatsak zuzentzera edo bestela esanda, geometria euklidestarra erabateko zorroztasunez formulatzera zetozen Hilberten axiomak. Zorroztasun hori lortzeko beharrezkoa da sistema axiomatikoa, XIX. mende amaierarako kontzeptu honek garatutako izaerarekin osatzea. Hilbertek bost axioma multzo eman zituen horretarako: intzidentzia axiomak, bitartekotasun axiomak, kongruentzia axiomak, jarraitutasun axiomak eta paralelismoaren axioma, azken hau, aurreko oin-oharrean aipatu duguna, eta Euklidesen bosgarren axioma gatazkatsuaren baliokidea dena. Ikusi frogapen bat, esaterako, [Greenberg 1980, 104. or.]. Hauexek lirateke geometria euklidestarraren oinarriak. Hilberten axiomatikari paralelotasun axioma kenduta, *geometria absolutua* edo *geometria neutroa* deitzen zaio. Eta *geometria neutro* honi paralelotasun axioma erantsita *geometria euklidestarra* lortzen den moduan, paralelotasun axiomaren ukazioa erantsita lortutakoa da, hain zuzen ere, *geometria hiperbolikoa*. Zehatzagoak izateko, aurreko oin-oharrean aipatutako paralelotasun axiomaren ordez, geometria hiperbolikoan, existitzen da zuzen bat eta existitzen da honen gainean ez dagoen puntu bat, puntu horretatik gutxienez hasierako zuzenarekiko bi zuzen paralelo pasatzen direlarik.

[57] Ikusi adibidez [Greenberg 1980, A eranskina].

[58] Ikusi Geometria Diferentzialari buruzko oinarrizko edozein lan Gaussen kurbaturari buruzkoak begiratzeko. Adibidez [do Carmo 1976].

ostean. XVIII. mendearen bukaera aldetik XIX. mendea amaitu bitartean, ordura arte bakarra kontsideratzen zen esparruak[59], elkarren artean zerikusi handirik ez zutela zirudíten esparru anitzen panoramari eman zion bide. Konplexuen gorputzaren gainean egiten zen geometria projektiboak garrantzia handia hartu zuen. Hor zeuden baita ere geometria euklidear zaharra, geometria afina, Lobatechebskyren geometria edo geometria hiperbolikoa, geometria deskribatzailea eta abar. Ez zegoen argi geometria lantzeko metodologia egokia zein zen ere: hizkuntza aljebraikoa erabiliz, Descartes eta Fermatek abiatutako bidetik, edo betiko geometria sintetiko greziarraren bidetik. Geometriaren batasuna kolokan ikusten zuten askok: zein irizpideren arabera antolatu eta bateratu zitekeen geometria, sortutako adar ezberdinen hierarkia eta erlazioak ulertzeko moduan?

Sistema geometrikoen aniztasun horrek geometria beraren batasuna zalantzan jartzen zuen. Posible ote zen gehiago geometriaz hitz egitea? Eta hala izatekotan, zein zen geometria desberdinen ikuspegi homogeneo bat eskaintzea posible egingo zuen kontzeptua?[60]

Kleinek *Erlangen programa* aurkeztu zuen 1872an galdera hauei erantzuteko asmoarekin[61]. Itxuraz izaera eta estilo desberdineko *espezieak* modu bateratuan ulertzeko printzipio orokor egokia aurkitu zuen[62] Kleinek, geometriak hauen transformazio taldeen arabera ordenatuz. Kleinek ikusi zuen sistema geometriko bakoitzaren transformazio taldeek, hauen propietate intrintsekoak modu homogeneo batean lantzeko aukera ematen zuela, aldi berean, geometria horretan ezinbestekoa zen oro

[59]Geometria euklidestarra.

[60][Bourbaki 1948]-k planteatzen zituen galdera berberak planteatzen ziren geometriaren baitan.

[61]Gerora Bourbakik matematika osorako egin nahi izan zuena dakarkigu gogora, eta zentzu horretan, Kleinen ekarpena, matematikaren barne oinarrietan ez bada, geometriaren barne oinarrietan kokatu beharrekoa da.

[62]Gogoratu Schwarzen aipamena, Bourbaki Matematikako Linnaeus izan zela aipatuz. Kasu honetan, Bourbaki baino lehenago geometriaren esparruan antzerako zerbait egin zuen Kleinek. Marquisen liburuaren tesia da, ez soilik "antzerako zerbait", baizik eta funtsezkoagoa den zerbait egin zuela Kleinek, kategorien teoriaren aurrekari gisa jokatuz.

jasoz, eta zehaztasun irrelebanteak bereiztuz. Hortik zuzenean ondorioztatzen da transformazio taldearen kontzeptua geometria baten oinarri-oinarrizko ezaugarriei zenbateraino lotua dagoen. Geometria baten oinarrizko ezaugarrien aurkezpen bat da honen transformazioen taldea, finean.

Azken puntu hau argitze aldera [Marquis 2009][63] liburuan aipatzen diren bi adibide emango ditugu. Plano euklidestarra eta honen transformazio taldea aipatuko ditugu lehenbizi. Behar adinako zehaztasunez hitz egin ahal izateko, $\mathbb{R}^2$ plano erreala kontsideratuko dugu. Batetik plano errealean ohiko metrika definituz $d(x, y) = |y - x|$, non x eta y planoko puntuak diren, plano erreala plano euklidear bilakatuko zaigu. Bestetik, plano erreala $\mathbb{R}$ gaineko espazio bektorial bat da, eta honek tresna aljebraikoen bidez objektu geometrikoak definitzeko bidea ematen du. Adibidez, zuzen bat definitzeko honela joka dezakegu: lehenbizi *norabide* bat definitu, v bektore ez-nulu jakin bati proportzioak zaizkion bektoreen multzo bezala, hau da, $[v] = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$, eta ondoren P puntu batetik pasatzen den l zuzen bat $l = P + [v]$ izango da, hau da, $l = \{x \mid x - P \in [v]\}$. Plano euklidestarraren deskribapen aljebraikoa litzateke hau. Beste batzuk ere posible diren arren, analitikoa, edo baita logiko-sintetikoa ere. Konbinatu ere egin daitezke deskribapen axiomatiko-aljebraikoak erabiliz, adibidez. Aljebraikoak badauzka gure azalpenerako abantaila batzuk, ordea, berehala ikusiko dugunez.

Geometria euklidearrean bereziki, baina baita beste edozeinetan ere, bat ibilian konturatzen denez, emaitza asko figura geometrikoen berezko simetria batzuen ondorio dira. Simetria hauek guztiz determinatu daitezke geometria bakoitzean, transformazio egokien bidez. Plano euklidestarraren kasuan transformazio hauek, planoko "isometria" deitzen ditugunak izango dira[64].

[63] *Erlangen programa*-ri buruz irakurtzeko: Kleinen hitzaldiaren argitalpena [Klein 1872], eta bigarren mailako erreferentzia batzuk: [Klein 1908], [Hawkins 1984], [Yaglom 1988, 7. kapitulua], [Birkhoff & Bennett 1988], [Wussing 1969, 178-193 or.], [Kline 1972, 38. kap.], [Marquis 2009, 1. kap.].

[64] Geometria bakoitzaren kasuan transformazio hauek zeintzuk diren antzemateko, identitate eta

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio bijektiboa izanda, *isometria* bat da distantziak "gordetzen" baditu, hau da, $f(d(x, y)) = d(f(x), f(y))$. Ikusi daiteke planoko edozein isometria, azken finean, zuzen baten gaineko translazio bat, zuzen batekiko erreflexio bat edo puntu batekiko errotazio bat dela. Horiek guztiek planoko isometria guztien $S(\mathbb{R}^2)$ multzoa osatzen dute. Eta multzo honek talde estruktura dauka aplikazioen konposaketarekiko. Batetik multzo horretan ondo definitutako eragiketa bat da, isometrien konposaketa bat beste isometria bat delako. Eragiketa elkarkorra da. Bada puntu guztiak bere horretan uzten dituen e *identitate* isometria bat. Eta f isometria bakoitzak, badu *alderantzizko* f^{-1} isometria bat, biak konposatuta puntu guztiak bere horretan uzten dituena. $S(\mathbb{R}^2)$ da, beraz, plano euklidearreko transformazioen taldea.

Geometriaren deskribapen aljebraikoa oso lagungarria suertatuko zaigula esan dugu. Izan ere, isometriak, ikusi dugunez, $\mathbb{R}^2$ko transformazio lineal berezi batzuk baino ez direnez, matrizeen bidezko adierazpena onartzen baitute. Ikusi daiteke $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria batek era honetako adierazpen matrizial bat onartzen duela: $f(x) = Ux + a$, U matrizea 2×2 dimentsioko matrize ortogonal[65] bat izanik eta a $\mathbb{R}^2$-ko bektore bat.

Lan honen 2.1.1 atalean aipatzen genuenez, ekuazio aljebraikoen erradikalen bidezko soluzioen bilaketa prozesuan bezalaxe, geometrian ere taldeen erabilera, kasu honetan bereziki sistema geometriko bakoitzaren transformazioen taldeak, gero eta paper garrantzitsuagoa hartuz joan ziren: problemak soluzionatzeko tresna aljebraikoak izatetik, geometria konkretuen izaera karakterizatzen duen osagai zentrala izatera. Ikusi dezagun Elie Cartanek honen harira esaten duena:

esanguratasun irizpideak kontutan hartu behar dira. Zeinztuk dira edozein figura, figura "baliokide", "identiko" batean aplikatzen duten "mugimendu" (motion), edo transformazioak? Figura baten propietate bat ematen dugunean, zein da propietate hori aplikatzen zaien figuren multzoa, eta zehatzago, zeintzuk dira hauetako edozein beste batean transformatzen duten aplikazioak?

[65]Gogoratu: matrize ortogonalak, alderantzizkoa eta iraulia berbera dutenak dira: $M^{-1} = M^t$.

> Izan ere, geometriaren hasieratik sartu izan den berdintasun nozioaren zehazpenaren bila jotzen baldin bada, orduan honako hau esatera beharturik gaude, hau da, bi figura berdinak dira batetik bestera pasa daitekeenean eragiketa geometriko jakin baten bidez, alegia desplazamendu esaten zaionaren bidez. Hau, bistan da, ez da hitz aldaketa bat besterik; baina bi figura hirugarren baten berdinak direla dioen axiomak desplazamendu deitutako eragiketak lege baten menpean jartzen ditu eta lege hori hauxe da: hurrenez hurrengo bi desplazamenduen ondorioz sortzen den eragiketa bera desplazamendu bat besterik ez dela. Lege hauxe da matematikariek adierazten dutena desplazamenduek talde bat osatzen dutela diotenean. Orduan geometria elementala honela definitua gera daiteke: desplazamendu taldearen eragiketen bidez aldatzen ez diren figuren propietateen azterketa.[66]

Hiru aspektu filosofiko nagusi egozten dizkie Marquisek Cartanen hitzetatik transformazio taldeei, Erlangen programan: batetik, geometria baten transformazioen taldeak objektu-tipo[67] geometrikoen barne-identitate irizpide bat kodifikatzen duela oso modu zehatzean; bigarrenik, propietate geometrikoen esanguratasun irizpide bat ere kodifikatzen duela; eta hirugarrenik eta azkenik, Kleinen programaren azken asmoarekin bat eginez, transformazio taldeek espazio geometrikoen sailkapen sistematiko baterako, eta hauen arteko ezkutuko erlazioak esplizitu egiteko kanpo-identitate irizpide bat ere kodifikatzen dutela[68]. Ikusi dezagun guzti honek zer esan nahi duen,

[66]Si en effet on cherche a preciser la notion d'égalité qui s'introduit des le debut de la Géométrie, on est amené à dire que deux figures sont egales quand on peut passer de l'une a l'autre par une certaine operation geometrique, appelee deplacement. Cela n'est evidemment qu'un changement de mot; mais l'axiome d'apres lequel deux figures egales a une troisieme sont egales entre elles assujettit les operations appelees deplacement a une certaine loi, a savoir que l'operation resultant de deux deplacements successifs soit encore un deplacement. C'est cette loi que les mathematiciens expriment en disant que les deplacements forment un groupe. La Geometrie elementaire peut alors etre define comme l'etude des propietes des figures qui ne changent pas par les operations du groupe des deplacements. [Cartan 1974, 15-16 or.] [Marquis 2009, 19. or.]-n aipatua.

[67]Figura konkretuak objektuak diren bitartean, onartutako transformazioen arabera, hauen baliokideak diren figura guztiek osatutako multzoak izango lirateke objektu-tipo edo esanahi-unitateak, geometria bakoitzean.

[68]Marquisek defendatuko du, zentzu hirukoitz berean, kategoriek espazio geometrikoak, eta morfismoen aljebrek transformazio taldeak orokortzen dituztela, goian aipatu dugun, Mac Lane eta Eilenbergek pentsatutakoa baino askoz modu sakonagoan.

azaldu berri dugun adibidearen baitan.

Erlangen programak jasotzen duen lehenbiziko aspektu filosofikoari dagokionean, plano euklidestarraren adibidean, aipatu dugun isometrien taldeak, figura kongruenteen nozioa definitzeko balio du: F_1 eta F_2 bi figura *kongruenteak* direla esaten da F_1-etik F_2-rako isometria bat existitzen bada. Identitate nozio bat determinatzen du honek geometria euklidestarraren kontestuan: isometria bat bitarteko bata bestean transformatu daitezkeen figurak, identikoak, baliokideak bezala tratatuko ditu geometria euklidestarrak. Adibidez, triangelu jakin bat planoko puntu batekiko angelu bat bira arazten badugu, lortuko dugun triangelua, geometria euklidestarraren ikuspuntutik jatorrizkoarengandik bereiztezina da. Orokorrean, geometria ez da figura partikularrei buruzkoa, figura tipoei buruzkoa baizik. Klase bakoitzeko figura tipo pertinenteak, kasu bakoitzeko transformazio pertinenteek determinatzen dituzte. Sistema geometriko baten transformazioen taldeak espazio horretan onargarriak diren tipoak determinatzen dituzte. Adibidez, zirkuluak eta elipseak tipo desberdineko figurak izango dira geometria euklidearrean, baina ez, ordea, ikusiko dugunez, geometria afinean.

Aipatu dugun bigarren ikuspuntuari dagokionean, hau da, geometria baten transformazioen taldeak propietate geometrikoen esanguratasun irizpidea kodifikatzen duela esatean, ondokoa interpretatu behar da, konkretuki, geometria euklidestarraren kasuan. Isometrien taldeak determinatzen duela, planoko figuren propietate euklidear esanguratsuak zein diren. Zehatzago esanda, planoko F figura baten P propietate bat F-ren propietate euklidear esanguratsu bat izango da, F figura zurrun bat den heinean dagokion propietate bat bada, hau da, F-ren planoko isometria bidezko transformazioek[69] propietatearengan eraginik ez badute. Formalki adierazita, F figurak P propietate euklidear esanguratsu bat izango du, baldin eta edozein f iso-

[69] *Mugimendu zurrunak* bezala definitu ohi dira askotan transformazio hauek, figura deformatu gabe planoan mugitzearekin parekatu daitezkeelako.

metriarako, $f(F)$ figurak ere P propietatea badu. Orokorrean, esango genuke sistema geometriko baten berezko propietate bat transformazio errelebanteekiko inbariantea dela. Ikusi daiteke baldintza hauek betetzen dituzten propietateen artean daudela, besteak beste, distantzia, angelua, puntuen arteko kolinealitatea eta zuzenen ebakidura puntuak. Planoko mugimendu zurrunekiko inbarianteak diren propietateak, hain zuzen ere. Intuitiboki begi bistakoa dena, formalki jasoa geratzen da honela, planoko mugimendu zurrunek, distantziak, angeluak, kolinealitatea nahiz zuzenen arteko ebakidura puntuak kontserbatzen dituztela argi baitago.

Geometria sistema desberdinen arteko erlazioak eta sailkapenaren ingurukoak hobeto ulertzeko, geometria euklidestarrarekin konparatu ahal izateko bigarren adibide bat hartuko dugu: plano afina. Oinarriko espazio berbera hartuko dugu $\mathbb{R}^2$. Aurreko kasuan ez bezala, ordea, sistema geometriko honetan metrikak ez du inongo paperik jokatzen; irrelebantea da erabat. Esaterako, zirkunferentzia baten erradioa, propietate euklidear bat da, baina, badira euklidestarrak ez diren eta zirkunferentzia guztiek, zirkunferentzia izateagatik betetzen dituzten propietateak. Eta gauza bera esan dezakegu gainontzeko figurengatik. Eskakizun hauek betetzen dituen sistema geometriko bat da plano afina, hain zuzen ere. Plano euklidearrean, isometria edo mugimendu zurrunak identifikatu ditugun bezala, kasu honetan, planoko transformazio errelebanteak kolineazio deitzen dira. *Kolineazioak* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio bijektiboak dira, eta matrizialki honelako adierazpena onartzen dute: $f(x) = Ax + b$, A matrizea 2×2 dimentsioko matrize alderanzgarri bat izanik eta b $\mathbb{R}^2$-ko bektore bat. Transformazio afinek zuzenak zuzenetan transformatzen dituzte, zuzen paraleloak zuzen paraleloetan, eta zuzenen gaineko zuzenkien proportzioak kontserbatzen dituzte. Horiek guztiak planoko propietate afinak lirateke. Plano euklidestarraren kasuan gertatzen den bezala, transformazio afinen multzoak ere, hauen arteko konposaketarekiko talde egitura du. Talde honek berriz ere, aurreko kasuan aipatutako, sistema honi dagokion informazio hirukoitza kodifikatzeko balio du: identitatearen nozioa, esanguratasunaren nozioa eta sistema geometrikoen arteko interdependentziarena.

Ikusi daiteke triangelu guztiak identikoak direla, transformazio afinek kodifikatutako identitatearen kontzepziopean, hau da, planoko edozein triangelu planoko edozein triangelutan transforma daitekeela kolineazio egokiaren bidez; edozein elipse, edozein elipsetan (zirkunferentziak elipse konkretuak lirateke); edozein hiperbola, edozein hiperbolatan; edozein parabola, edozein parabolatan. Baina inoiz ez klase bateko bat beste klaseko batean. Gauzak honela, triangelu guztiek propietate afin berberak elkarbanatzen dituzte, eta gauza bera esan daiteke elipse, hiperbola eta parabolengatik. Propietate afinak, beraz, propietate euklidearren desberdinak dira. Badirudi, geometria afina geometria euklidestarra baino orokorragoa, abstraktuagoa dela esan dezakegula. Baina ez da erraza intuizio hau formalki zehaztasunez adieraztea. Hain zuzen ere, hemen ikusiko dugu hasieran defendatu dugun geometrien aurkezpen aljebraikoaren abantaila nagusi bat. Kasu bakoitzean, transformazioek onartzen duten adierazpen aljebraikoa kontsideratzen badugu, erraz ikus daiteke edozein isometria kolineazio bat ere badela, aldi berean, matrize ortogonalak alderanzgarriak direlako. Alderantzizkoa, ordea, ez da egia: badira ortogonalak ez diren matrize alderanzgarriak. Ondorioz, ezin esan edozein kolineazio isometria bat denik. Ondorioa argia da, isometriek kolineazioen azpitalde bat osatzen dute, edo bestela esanda, transformazio euklidearrek transformazio afinen azpitalde bat osatzen dute. Zentzu honetan, geometria euklidestarra geometria afinaren “azpigeometria” bat dela esan daiteke. Hau da Kleinek bilatzen zuen geometrien arteko erlazioaren adierazpen behinena, eta Marquisek aipatutako Erlangen Programaren hirugarren aspektu filosofiko nagusia.

Orokorrean, Γ_1 eta Γ_2 bi sistema geometrikok S espazio berean eraikiak badaude eta G_1 eta G_2 simetria taldez determinatuak badaude, $G_1 \subset G_2$ izanik (hau da, G_1 G_2-ren azpitaldea izanik), zentzuren batean esan dezakegu sistema geometrikoen arteko erlazioa simetria taldeen artekoaren alderantzizkoa dela, hau da, Γ_2 sistema geometrikoa Γ_1 baino 'txikiagoa' dela, edo, bestela esanda, Γ_2 Γ_1-en azpigeometria bat dela. Azken finean, Γ_2-n zentzuzkoa den edozein nozio Γ_1-en ere zentzuzkoa izango da, G_2 taldeko transformazioek gordetzen badute, G_1-ekoek ere, aurrekoen artean egonik, gordeko baitute. Eta S-ko irudiei buruzko propietateen inguruko Γ_2-ko edozein teorema, eta beraz G_2-ko transformazioek gordetzen dutena, G_1 aurrekoaren azpitaldeko transformazioek ere gordeko dute, eta beraz Γ_1-en ere teorema izaten jarraituko du. $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ adieraz dezakegu bi sistema geometrikoen arteko erlazioa, partekotasun erlazioaren ikurra bortxatuz, sinpletasunaren izenean. Goiko adibidean ikusi dugu geometria afinaren G_a transformazio afinen taldearen eta geometria euklidestarraren G_i isometrien artean $G_i \subset G_a$ erlazioa daukagula, eta azken arrazonamenduaren ondorioz $\Gamma_a \subset \Gamma_i$ izango dugula, hau da, geometria afina, geometria euklidestarraren azpigeometria bat dela. Horrela geometria afineko edozein nozio eta teorema, erabilgarriak dira geometria euklidearrean. Kontrakoa ez da betetzen.

Kleinen ondoren transformazio taldeek geometrian hartu zuten zentralitateak geometriara ikuspuntu abstraktu bat ekarri zuen. Geometria aljebran diluitu izan balitz bezala. Sistema geometriko bat definitzeko, nahikoa dira oinarrizko S barietate konexu bat eta honen gainean trantsitiboki eragiten duten[70] transformazioen (simetrien[71]) G Lieren talde bat[72].

Esandakoak neurri batean zirkularra eman dezake hasiera batean: nola definitu geometria bat transformazioen talde bat erabilita, transformazioak geometria baten gainean definitzen badira? Talde abstraktuen artetik geometriaren baten transforma-

[70]Gogoratu, orokorrean, G talde batek X multzo baten gainean eragiten duela esaten dela existitzen bada, *eragina* deitzen den $\alpha : G \times X \to X$ bi baldintzok betez: 1) $\alpha(e, x) = ex = x$, non e elementua G-ko identitatea den; 2) $\alpha((g_1g_2), x) = (g_1g_2)x = \alpha(g_1, (g_2x)) = g_1(g_2x)$. Bereziki eragin hori *trantsitiboa* dela esaten da, edozein $x, y \in X$ hartuta existitzen bada $g \in G$, $gx = y$ betetzen duena. Eta eragina *efektiboa* dela esaten da, Sko edozein x elementurentzat $gx = x$ betetzeak, g G taldeko identitate elementua izatea inplikatzen duenean.

[71]Hain zuzen ere, sistema geometriko bakoitzak bere "simetriak" izango ditu.

[72]G Lieren talde bat, talde eta barietate diferentziagarri estrukturak, $\mu : G \times G \to G$ talde-eragiketa eta $\iota : G \to G$ alderanzketa (alegia, $g \in G$ elementu bakoitzari $\iota(g) = g^{-1}$ bere alderantzizkoa egokitzen dion funtzioa) funtzio diferentziagarriak izanik.

zio talde zeintzuk izan daitezkeen erantzun beharko litzateke horretarako. Hasiera batean ez baitakigu edozein talde emanda, posible den S domeinu baten gainean geometria bat definitzea, zeinaren transformazioen taldea hasieran emandako taldearekin bat etorririk. Lie-ren taldeen sailkapenaren problemara garamatza honek, eta taldeen errepresentazio teoriara. Edozein n zenbaki arrunterako, n dimentsioko gainazal batean eragiten duten talde jarraitu guztien sailkapena ematea da kontua[73].

Bide honetatik Kleinek geometria nozioa orokortu zuen, G Lieren talde batez, S barietate diferentziagarri batez eta G-ren S gaineko eragin diferentziagarri, trantsitibo eta efektibo batez osatutako hartara. Honek aukera ematen du azpimarra S espazioan jarri beharrean G Lieren taldean jartzeko. Horretarako nahikoa da $x \in M$ oinarri puntu bat finkatuta, $\pi : G \to S$ non $g \mapsto gx$ aplikazioa kontsideratzea. Eraginaren trantsitibitatea dela eta ikusi daiteke aplikazio hau suprajektiboa dela, eta alderantziz, ez dela injektiboa. H_x multzoa $\pi^{-1}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$ bezala definitzen badugu, G-ren azpitalde itxia dela ikus daiteke, x elementuaren *estabilizatzaile* deitutakoa. Gainera, argi dago, $y \in S$ denean, $\pi^{-1}(y) = \{g \in G \mid gy = y\} = g_0 H_x$ dela, g_0 elementua $\pi^{-1}(y)$ taldeko edozein elementu izanik. Hortik ondorioztatzen da π aplikazioak $G/H_x \to S$ bijekzio bat induzitzen duela. Hau guztia dela eta *Kleinen geometria* bat definitzeko nahikoa da G Lieren talde bat eta honen H Lieren azpitalde bat ematea, finkatutako $x \in S$ oinarri punturen batentzat $H = H_x$ izanik ere, hauek guztiak elkarren konjokatuak[74] direla ikusi daitekeenez, guztiek ere G/H espazio *homogeneo* berbera definitzen dutelako, hau da, propietate geometrikoen bidez bereiztu ezindako puntuz osatuta daudenak, eta G taldeak espazio honengan trantsitiboki eragiten du. Erabat modu aljebraiko-topologikoan definitutako Kleinen geometria hauek "lauak" direla ere esaten da.

Kleinek sistema geometriko desberdinak, ez guztiak, modu homogeneo batean

[73] Guztiz ebatzi gabe [Marquis 2009].

[74] Hau da, S-ko x eta y edozein bi oinarri punturentzat existitzen da $g \in G$ non $H_y = g^{-1} H_x g$.

ulertzeko transformazioen taldeen bidezko geometriaren aljebraizazio prozesu garrantzitsu bat abiatu zuen. Aurrerantzean sistema geometriko desberdinak aljebran diluituta gelditu ziren, batez ere Lieren lanei jarraituz, Cartanek garatutako Lieren taldeen teoriaren baitan [75].

Riemannen gainazalak Kleinen programarekin bateratu zituena Elie Cartan izan zen, hain zuzen ere. Eta berak aitortzen duenez Kleinek abiatutako *Erlangen Programako* ideiak malguago egitetik aurkitu zuen bide egokia:

> Erlatibitatearen teoria orokorrari jarraitu zien ideien korrontearen hasieran, geometria riemanndarrak baino orokorragoak diren, eta Kleinen geometria desberdinekiko, geometria riemanndarrek espazio euklidestarrarekiko jokatutako paper bera jokatzen zuten, geometria berrien nozioa sartzera bideratua izan nintzen. Modu honetan burutu nuen sintesi zabala Kleinek bere Erlangen programa ezagunean formulatutako ideien menpekoa da, noski, aldi berean haietatik harago doalarik geometria riemanndarra barneratzen duenez, erabat isolatutako geometriako adarra izan zena, taldearen nozioak oraindik oinarrizko paper bat jokatzen duen oso eskema orokor baten baitan.[76]

Luzerako joko lukeen zehaztasunetan sartu gabe, oso modu eskematikoan esan dezakegu *Cartanen geometria* deitutakoek Kleinen geometriak orokortzen dituztela, ba-

[75]Beste kontu bat da, Dieudonnék ("The Universal Domination of Geometry" 1981) ongi argudiatzen duen moduan, hizkuntza geometrikoa eta intuizio espaziala, gaur egun matematikaren adar oparo askoren jatorrian egotea: aljebra lineala, ikerkuntza operatiboa, eskemen teoria, topologia, analisi funtzionala etab. "Geometriaren heriotza" aldarrikatzen dutenei matematikan momentu hartan egiten zen gehiena ez ezagutzea egozten die Dieudonnék. Geometria disziplina matematikoa izatetik matematikan nonnahi erabiltzen den tresna bat izatera pasa dela onartu arren. Disziplina bezala zeun autonomiari amaiera jarri zion Kleinen *Erlangen Programak* lehenbizi eta Cartanek gero, segidan ikusiko dugunez.

[76]In the wake of the movement of ideas which followed the general theory of relativity, I was led to introduce the notion of new geometries, more general than Riemannian geometry, and playing with respect to the different Klein geometries the same role as the Riemannian geometries play with respect to Euclidean space. The vast synthesis that I realized in this way depends of course on the ideas of Klein formulated in his celebrated Erlangen programme while at the same time going far beyond it since it includes Riemannian geometry, which had formed a completely isolated branch of geometry, within the compass of a very general scheme in which the notion of group still plays a fundamental role. [Cartan 1939] [Sharpe 1997, 171. or.]-n aipatua.

rietate baten puntu bakoitzari Kleinen geometria baten kopia bat elkartuz eta kopia hau puntu horretan barietatearekiko *tangentea* kontsideratuz. Era honetan barietatearen "geometria", puntu bakoitzean, lokalki, elkartu zaion Kleinen geometriaren baliokidea da. Globalki ordea, oso desberdina izan daiteke.

Behin eta berriz errepikatu dugu jatorrian geometria espazio bateko objektuen artean definitzen den kongruentzia edo baliokidetasun erlazio batean datzala eta Klein izan zela kongruentzia nozio hauek jakineko Lieren taldeen eragin batengatik ordezkatzeari ekin ziona. Metaforikoki hitz eginda, Lieren taldeen eragina zentzu batean "zurruna" zela esan daiteke, eta horren aldean, Cartanen geometriek ekarritako kongruentziaren orokorpenak, Riemannen geometriek eskatzen zuten kurbaturaren nozioa jasotzeko aukera eskaini zuela.

Cartanen geometriak Kleinen lana osatzen dutela argi dago edozein modutan, eta geometriaren kontzepzio zabalago horrek Kleinen bidea berretsi ez ezik finkatu ere egiten duela. Kleinek geometria esparru bezala karakterizatzeko irizpide egokia aurkitu zuen simetria taldeetan, poliki poliki sistema geometrikoak modurik abstraktuenean eta orokorrenean formulatzeko bidea erakutsiz. Kleinek geometriaren printzipio ordenatzailea aurkitu zuela esango genuke termino Bourbakiarrak erabilita. Beste kasu batzurekin batera, honek erakusten du, esparru matematikoen berrantolaketan funtzio esanguratsuak aurkitu eta hauen estrukturak aztertzeak izan ohi duen garrantzia.

3.2.2 Topologia Aljebraikoaren kasua

Indarra funtzioetan eta bereziki funtzioen aljebra edo estrukturetan jartzeak XIX. mendeko geometriaren panorama zein neurritan argitu zuen aztertu dugu: geometriaren izaera funtsezkoago batera iristeko ezinbesteko urratsa izan zen. Baina Kleinen *Erlangen* programa ez da kasu isolatu bat, gure iritzian. Funtzioen aljebrek geometria “antolatzeko” balio izan zuten moduan, topologia aljebraikoaren kasuan ere antzeko zerbait gertatu zelakoan.

Topologia aljebraikoaren jatorrian, beti bezala, motibazio desberdinen bilduma bat aurki dezakegu. Hauetako batzuk aipatuko ditugu, hasteko. Batetik lehenago ere aipatu izan dugun puntu bat ekar dezakegu gogora: XX. mende hasierarako ondo ezaguna zela, Galoisek egin zuen bezala, problema matematiko bat ebazteko, hau esparru abstraktuago batean kokatzea. Ikusi izan zen gainera esparru abstraktuago hori bereziki egitura aljebraikoen baitan bilatu beharrekoa izan zitekeela, hauek kalkulurako eskaintzen zituzten baliabideak zirela eta[77]. Riemannen funtzio konplexuen teorian aurki dezakegu bigarren helduleku bat. Bi aldagai konplexuko funtzio polinomikoak aztertu zituen Riemannek, gaur egun, Riemannen gainazalak bezala ezagutzen direnak adieratzen zituztenak. Aldagai konplexuko $f(x, y) = 0$ itxurako funtzio polinomiko hauetan x-en balio bakoitzari y-ren balio kopuru finitu bat egokitzen zaio. Gainazalok hobeto ulertzeko, hauen gainean kurbak marraztea proposatu zuen Riemannek, gainazalok marraztutako kurbetatik ebaki ezkero, disko poligonaletan zabalduak izateko moduan[78]. Gainazal bat horrela zabaltzeko behar zen kurba kopuru minimoa eta gainazalean definitu ahal zen funtzio kopuruaren arteko erlazio sakona aurkitu zuen Riemannek.

Dimentsio handiagoko espazioak aztertzeko Riemannen ideiek izan zezaketen baliagarritasuna ikusteko zegoen oraindik. Bi ikerketa lerro nagusi abiatu ziren Riemannen azterketetatik. Lehenbizikoa geometria projektiboaren ikuspegitik, italiarrek garatu zuten, gerora geometria aljebraiko modernoari bidea irekiko ziona. Gainazal batek izan ditzakeen singulartasunak aztertzen ahalegindu ziren, guztiz ebatzi ezin izan bazituzten ere. $f(x, y) = 0$ moduko ekuazioen bidez emandako leku geometrikoek beren burua puntu isolatuetan baino ebaki ezin zuten bitartean, $f(x, y, z) = 0$

[77]Kalkulurako baliabideak eskaintzeko garatu izan da hein handi batean aljebra historikoki.
[78]Toru bat disko trapezoidal batean, zabaldu daiteke adibidez, bi ebaki emanda.

moduko ekuazioen bidez emandako leku geometrikoek, beren burua kurben bidez zergatik ebaki zezaketen ulertu ezinda ibili ziren. Bigarren bidea, besteak beste, Piccard eta Poincarék jarraitutakoa izan zen. Gainazalen gaineko ibilbideen gaineko integralen azterketara zuzendua egon zen, eta Riemannen jatorrizko ideia modu esanguratsuan orokortu ahal izan zituzten. Bigarren bide hau izango zen topologia aljebraikora eramango zuena.

Poincarék lehenik eta Lefschetzek geroago, edozein dimentsioko barietateen izaeraren gaineko konjeturak egin zituzten. Lehendabiziko konjeturak barietateak zatietan banatu eta behar izandako zati kopurua zenbatzearen ingurukoak izan ziren, gero beste behin zatiok deskonposatzeko. Hortik sortu ziren Bettiren zenbaki eta tortsio koefiziente deitutakoak, Poincarék ikusi zuenez Eulerren karakteristika deitutakoa inbariante topologiko bat izatearekin erlazionatuta zeudenak. Emmy Noether izan zen azkenik zenbaki hauek sakonagoko kontzeptu baten adierazle bezala ulertu zituena, homologia talde batena, hain zuzen ere. Orokorrean, finituki sortutako A talde abeldar bat, F talde abeldar libre bat eta A/h_i formako talde ziklikoen familia baten batura zuzen bezala idatzi daiteke, $h_1|h_2|...$ zatigarritasun erlazioa izanik. Baldintza hauetan, F parte abeldar librearen heina eta h_i zenbakiak taldearen inbarianteak direla ikusi daiteke. A baldin bada, d dimentsioko homologia taldea, bere heina Bettiren d-garren zenbakia izango da, eta h_i-ak tortsio koefizienteak. Ikusi daitekeenez ulergarritasunaren aldetik asko aurreratu zen Noetherren ekarpenari esker. Poliedroei, tortsio koefizienteak eta Bettiren zenbakiak ez ezik, homologia taldeak nola elkartzen zitzaizkien erakutsi zuen Noetherrek. Espazio baten homologia eta kohomologia taldeen teoriari hasiera eman zitzaion honela.

Espazio topologikoen homologia taldeak inbariante topologikoak direla esatean, espazio topologiko homeomorfoek edo baliokideek, homologia talde isomorfoa dutela esan nahi da. Zentzu honetan inbariante topologikoak oso garrantzitsuak suertatzen dira, espazio topologikoak sailkatzerakoan, batez ere, emaitza negatiboak lortzeko, hau da, bi espazio homeomorfoak ez direla frogatzeko. Horretarako nahikoa litzateke, esan dugunaren arabera, espazio bakoitzari dagokion inbariantea kalkulatzea: isomorfoak ez badira, argi dago hasierako bi espazioak ezin direla espazio homeomorfoak izan.

Espazio topologiko bat bere topologia aljebraikozko irudiaz, kasu honetan homologia taldeaz ordezkatzean informazio bat galtzen dela ondoriozta dezakegu aurreko paragrafoan homologia taldeei buruz esandakotik. Galera hori minimizatzen ahalegindu zen Poincaré, espazio topologiko bat beste batekiko baliokidea edo homeomorfoa dela ziurtatu ahal izateko baldintza aljebraiko nahikoak zeintzuk liratekeen galdetuz. Zehatzago esanda, espazio topologiko bat esfera baten homeomorfoa izateko baldintza aljebraiko nahikoak zeintzuk ziren galdetu zuen Poincarék. Lehendabizi adibide burutsu bat erabilita, erakutsi zuen homologia talde berdina izatea ez zela bilatutako erantzuna: posible zela esferaren homologia talde berbera izanik, topologikoki baliokidea ez zen espazio bat kontsideratzea, hain zuzen ere. Eta ondoren baliokidetasun topologikoaren adierazle aljebraiko finago bat proposatu zuen, espazio baten homotopia taldea edo talde fundamentala deitutakoa. Homotopia teoria deitu izan denari hasiera eman zion horrela.

Jatorrizko problemari erantzuteko pentsatua egonik, homotopia teoria homologia eta kohomologia teoriak baino oinarrizkoagoa dela esan daiteke, eta aldi berean baita konplikatuagoa ere. Espazio askotarako homologia eta kohomologia taldeak konputatzeko metodo estandarrak existitzen diren bitartean, oso bestelakoa da egoera espazio topologikoen homotopia taldeei dagokienean. Espazio topologiko klase gutxi batzuen kasuan izan ezik, gainontzean, ez da ezagutzen homotopia taldeak kalkulatzeko modurik. Gaur gaurkoz homotopia taldeek ez dute espazioak bereizteko bide praktikorik eskaintzen, kalkulatzeko horren nekezak izanik.

Esfera baten homotopia duen espazio bat esferarekiko homeomorfoa dela zioen duela gutxira arte *Poincaréren konjetura* bezala ezagutu izan denak. Perelmanek frogatu zuen azkenik 2002an $n = 3$ kasurako Poincaréren konjetura. Frogatzeke zegoen kasu bakarra.

Metodo aljebraikoak erabilita espazio topologikoak espazio homeomorfoetan sailkatzea da topologia aljebraikoaren zeregin nagusia. Horretarako topologiatik aljebrarako funktore egokiak eraikitzean datza lan egiteko modu honen oinarria. Espazio topologiko bati funktorialki objektu aljebraiko bat egokitzea lortzen badugu (izan taldea, eraztuna, modulua edo bestelako egitura aljebraikoren bat), topologikoki *inbariantea* dena, hau da, espazio homeomorfoei egokitutako egitura aljebraikoak isomorfoak izanik, posible izango dugu, espazio topologikoetan planteatutako problemak, funktore horien bidez, marko aljebraiko batera trasladatzea. Egitura aljebraikoak, egitura aberatsak dira beste era bateko egituren aldean: eragiketaz hornituak, kalkulurako "berariaz" prestatuko zelaiak dira, eta hauetan deribazioak egitea errazagoa, sistematikoagoa da, besteak beste aurrez zelai horietarako garatutako metodoak aplikatu daitezkeelako. Horixe da hain zuzen ere, orain arteko deskribapen laburrean ikusi duguna. Bi kontzeptu, funktore, nagusiri buruz hitz egin dugu.

Espazio topologiko baten homotopia taldeak dira bi funktore nagusi horietako bat. Orokorrean X espazio topologiko baten n dimentsioko $\Pi_n(X)$ homotopia taldeei buruz hitz egiten da. Aurrerago hitz egin dugun Poincaréren talde fundamentala, hauen kasu berezi bat baino ez delarik, sinpleena, $n = 1$ kasua. X espazio topologiko baten talde fundamentalak espazioaren *konexutasuna* neurtzeko balio du. Edo sarritan intuitiboki esan ohi den moduan, espazio batetako "zuloak" detektatzeko, espazioen konexutasun klaseak, hauen zuloen arabera sailkatu litezkeelakoan. X espazioko x puntu bat aukeratuta, puntu honetan oinarritutako *begizta*[79] bat, puntu horretan hasi eta bukatzen den X gaineko *bide* bat da; modu formalagoan esanda $\alpha : [0, 1] \to X$ non $\alpha(0) = \alpha(1) = x$. Oinarri puntu berbera duten α eta β bi begiz-

[79]Ingelesezko "loop".

taren artean *homotopikoa* izatearen baliokidetasun erlazioa definitzen da, hain zuzen ere, α eta β homotopikoak izateko baldintza bezala bata bestean modu jarraituan deformatu ahal izatea eta bitarteko bide guztiak ere x puntu berean oinarritutako begiztak izatea jarriz. Modu formalean, $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ deformazio jarraitu bat existitzen bada, $[0,1]$ tarteko edozein s-rentzat $H(s,0) = \alpha(s)$ eta $H(s,1) = \beta(s)$ izanik eta $[0,1]$ tarteko edozein t-rentzat $H(0,t) = H(1,t) = x$ izanik. Esaterako, plano euklidearrean (a,b) puntuan oinarritutako edozein bi begizta homotopikoak izango lirateke, eta aldiz, plano euklidestarrari puntu bat kenduko bagenio, puntu hori ez den beste edozeinetan oinarritutako edozein bi begizta homotopikoak izatea, kendutako puntuaren inguruan emandako bira kopurua berdina izatearen araberakoa litzateke.

X espazioa eta x oinarri puntua emanda, homotopikoa izatearena, x puntuan oinarritutako begizten arteko baliokidetasun erlazio bat da, eta beraz begizta hauen baliokidetasun klaseek $\Pi_1(X,x)$ denotatzen den, X espazioaren x puntuarekiko zatidura multzoa osatzen dute. Gainera posible da multzo honetan eragiketa bat definitzea. Horretarako, begiztak, finean, aplikazioak baino ez direnez, eta x puntuan oinarritutako bi begizten konposaketak ere hala izaten jarraitzen duenez, nahikoa litzateke eragiketa berria honela definitzea: $[\alpha] * [\beta] = [\alpha \circ \beta]$. Eragiketa honekin $\Pi_1(X,x)$ multzoak talde egitura duela ikusi daiteke eta x puntuan oinarritutako X espazioaren *talde fundamentala* deitzen da. Gainera X konexua bada talde honek ez du aukeratutako x oinarri puntuarekiko dependentziarik eta $\Pi_1(X)$ idatzi daiteke.

Horrela eraikitakoa, oinarri puntudun espazio topologikoen kategoriatik taldeen kategoriarako funktore kobariante bat da, aurrerago esan bezala, topologiatik aljebrara salto egiteko bidea ematen diguna. Espazio topologiko baten n dimentsio handiagoko $\Pi_n(X)$ homotopia taldeen segida bati hasiera ematen dio gainera, eta orokorrean, gaur Homotopia Teoria bezala ezagutzen den matematikako adarrari. Dimentsio handiagoko homotopia taldeek, $n = 1$ dimentsiorako ikusi dugun eraikuntza orokortzen dute.

Izan ere, X espazio baten talde fundamentala dimentsio baxuko espazioak aztertzerakoan bereziki erabilgarria bada ere[80] ez da gauza bera gertatzen dimentsio handiagoko espazioak kontsideratzean. Hau ez da harrigarria, espazio baten talde fundamentalaren dimentsio baxuko izaera ikusita.

Adibidez, $\mathbb{R}^3$ espazio euklidearreko ohiko esfera, S^2 denotatu ohi dena, kontsideratzen badugu, honen gainean marraztu dezakegun edozein begizta, puntu bakarrera uzkurtu daiteke modu jarraituan, eta beraz begizta guztiak homotopia klase bakarrari dagozkiola erraz ikusten da. S^2 esferaren talde fundamentala, talde tribiala izango da. Honek ez du, baina, S^2 esferaren topologia tribiala dela esan nahi[81]. Begizta guztiak puntu bakarrera uzkurtu daitezkeen arren, begizten dimentsio handiagoko homologoak kontutan hartzeak egoera argitzeko balio du. S^2 esfera, bera, kontutan hartuz gero ikusiko dugu, hau ezin dela puntu bakarrera uzkurtu. Bestela esanda, 1_{S^2} esferaren identitate aplikazioa, ez da esfera esferako puntu baterako aplikazio konstantearen homotopoa. Azken batean, posible da begiztaren n dimentsioko orokorpen bat ematea, eta hauen bitartez n dimentsioko homotopia taldeen kontzeptua. X espazio topologiko bat eta x edozein puntu emanda, x puntuan oinarritutako n dimentsioko begiztak, $\alpha : [0, 1]^n \to X$ aplikazio jarraituak izango dira, $[0, 1]^n$ n dimentsioko kuboaren muga x oinarri puntuan aplikatzen dutenak. Hauen homotopiazko baliokidetasun klaseak hartuz eta eragiketa egokia aurreko kasuan egindako modu analogoan definituz, ikusi daiteke, talde estrukturak lortzen direla berriz ere. Hauek ere X espazioaren inbariante topologikoak dira. Talde fundamentalak "dimentsio bateko zuloak" detektatzen eta zenbatzen dituen bezala, n dimentsioko homotopia taldeek "n dimentsioko zuloak detektatu eta zenbatu" ditzake.

[80]Aurki daitezkeen ohiko espazioen talde fundamentala kalkulatzea posibilitatzen duten emaitzak dauzkagu: Seifert-Van Kampenen teorema esaterako, edo talde fundamental berbera izanik, espazio bezala sinpleagoa den batengatik ordezkatzeko teknikak.

[81]Ez hori bakarrik, esaterako, ez da posible S^n esferak bereiztea talde fundamentala erabilita $n \geq 2$ kasuetarako, kasu guztietan berbera ematen baitu.

Horrela bada, talde fundamentalak eta honen dimentsio handiagoko senideek antzekotasun asko badituzte ere, bada beraien artean diferentzia nabarmen bat: azken hauek konputatzeko oso zailak dira. Dimentsio batean homotopia taldeen kalkulua bideratzen duten Seifert-Van Kampenena bezalako emaitzak ez dira dimentsio handiagoetan zuzenak. Eta aldiz, ikusi ahal izan da, espazio jakinen $H_n(X)$ homotopia taldeak praktikan kalkulatzeko bitarteko eraginkorrik ezagutzen ez den arren teorikoki oso esanguratsuak direla, besteak beste, Whiteheaden teorema dela eta[82]. Horrez gainera ikusi daiteke konputazionalki hain emankorrak suertatu diren homologia eta kohomologia teoriak, homotopia teoriaren adarrak bezala kontsidera daitezkeela[83].

3.2.3 Ondorioak eta metafora aldaketarako proposamen bat: *funtzionalismo estrukturalistaren* bidetik

Kleinen *Erlangen* programan atentzioa objektu geometrikoetatik funtzioetara aldatzeak ekarri zuen garai hartan nahasia eta ulertezina zen geometriaren esparru gero eta aberatsagoa modu sinple eta eraginkor batean berrantolatzea. Transformazioen taldeak funtzioen estrukturak dira, funtzioen aljebrak kasu honetan. Estruktura aljebraikoek beti paper bera jokatzen dute matematikaren baitan: esparru batean estruktura aljebraiko esanguratsuak definitzea lortzen denean, esparrua estrukturatzen laguntzen dute. Horixe egin zuen Galoisek, historian lehen aldiz. Estruktura aljebraikoak aurkitu zituen. Erakutsi zuen estruktura aljebraikoek nola estrukturatzen duten esparru difuminatu bat, esparru lauso bat, batasunik antzematea ere zail suerta zitekeen esparru bat. Kasu hartan ere, estruktura aljebraikoak, permutazioz, simetriaz, transformazioz, funtzioz osatuak zeuden. Atentzioa permutazioen gainean, eta hauek osatzen zituzten estruktura aljebraikoetan jartzea izan zen bere urrats handia. Inon-

[82] Poincaréren espazio homeomorfoak homotopia tipoen bidez karakterizatzeko ahaleginarekin lotuta Ikusi [Hatcher 2002] liburuko 4. kapitulua.

[83] Ikusi [Hatcher 2002] liburuan hitzaurreko ix. orria.

go erreferentziarik gabe Galoisen kasuan. Ondoren etorri direnentzat erreferentzia izan da beti Galois, zuzenean edo zeharka. Topologia aljebraikoaren kasuan ere, homotopia taldeen bidetik antzerako prozesu bat ematen ari delakoa da gure konjetura. Kontua da, Galoisek edo Kleinek aurrez egin zuten moduan, kontzeptu zentrala eta teoriaren artikulatzailea zein den antzematea. Eta matematikariek ondo jakin izan duten moduan kontzeptu hauek askotan funtzioak izan ohi dira. Eta funtzio hauek konbinatzetik sortzen dira, teoria ordenatzeko, sinpleago bihurtzeko eta bateratzeko estruktura aljebraikoak. Bourbakik estrukturetan bilatzen zuen matematikaren printzipio ordenatzailea esparru bakoitzeko funtzio pertinenteetan eta hauek osatzen dituzten estrukturetan (direna direla) aurkitzen dela diogu. Kleinen ildotik esparru bakoitzeko funtzio errelebanteak identifikatzea izan ohi da sarritan lanik konplikatuena eta bilaketa hau askotan ondoko galderari lotua egon ohi da: batetik, zeintzuk dira esparru horretako objektuen baliokidetasun klaseak eta zerk egiten ditu baliokide? Edo galdera beste era batean formulatuta esparru edo teoria batek aztertzen dituen propietateak zein transformaziorekiko dira inbarianteak? Galdera hauen erantzuna bakarra izan ohi da, objektuen arteko baliokidetasun erlazioa finkatzeko balio ohi duten transformazioak direlako teoria baten funtsezko propietateak inbariante mantentzen dituztenak.

Funtzio esanguratsuek osatzen dituzten estrukturek ez dute zertan estruktura ezagunak izan. Kleinek geometriak ordenatzeko aurkitutako funtzioen estruktura, lehenago Galoisek egoera desberdin batean aurkitutakoaren berdina izan zen: talde estruktura. Hala ere ez da ahaztu behar talde estrukturak Galoisen lanetan aurkitzen direla, problemari behin betiko soluzioa ematea lortzen duten heinean, hau da, Galoisek ez zuela talde estrukturarik aurkituko hori izan ez balitz arazoa soluzionatzeko balio zuena. Esanguratsua da bestalde talde estrukturak definitzea zenbat esparrutan suertatu den argigarria. Galdera bat sortzen da hortik berehala: zer dute taldeek matematika osoan eta baita matematikatik kanpo ere hain zabalduak egoteko? Estruktura aljebraikorik sinpleenetakoa da taldea, Fefermanen “bilduma” eta "eragiketa" nozioek eman dezaketen estruktura sinpleenetakoa. Sinplea eta aljebraikoa izatean egon daiteke estruktura horren arrakasta. Baina badira beste estruktura arrakastatsu batzuk, horietako asko aljebraikoak.

Descartesek zuen aljebra ikusteko moduaren garrantzia agertzen zaigu berriz ere. Lehenbiziko kapituluan esaten genuena errepikatuko dugu. Aljebrak matematika mekanizatzen du pentsamendua sinplifikatuz eta norbanakoaren esfortzua gutxituz prozesuak automatizatzerakoan. Berak *Mathesis* edo Matematika Unibertsala deitzen zion aljebrari, berez matematikaren gainontzeko adarren aurrekoa eta arrazonamendu matematikoaren zimendua. Arrazonamendu matematikoaren zientzia zen aljebra Descartesentzat. Descartesek ere geometriarentzako printzipio ordenatzaile bat aurkitu zuen aljebra erabiliz, nahiz eta garai hartan gaur estruktura deitzen ditugun horiek ezezagunak ziren. Ondo aztertu beharrekoa da aljebrak matematikaren baitan jokatzen duen aparteko papera zein den; bereziki, matematikaren antolaketa egokiak emateko erakutsitako gaitasun hori zeri zor zaion, aljebra azken batean eragiketaren zientzia dela gogoan hartuz.

Baina ez dugu guzti honetatik ondorioztatu nahi estruktura aljebraikoak soilik direnik garrantzizkoak matematikaren garapen eta egituraketa gogoan hartzen baditugu.

Teoria jakinetan era bateko nahiz besteko estrukturek duten eragin efektiboa kontutan hartzeak matematikaren izaera funktoriala (eta ez soilik kategoriala) jartzen digu begien aurrean. Esparru batean emaitzak lortzea oso zaila suertatzen denean, hor estruktura esanguratsu bat antzemateak, eta beraz funktore bat definitzeak, estruktura berezi horren teoria guztia esparru horretan aplikagarria egiten du problema irekiak ebazpen bidean jarriz eta ikerketa bide berriak zabalduz. Matematikaren izaera karakterizatzen du honek neurri batean. Esparru matematiko desberdinak funktorialki lotuak aurkitzen dira eta lotura horiek eraikitzean datza gaur matematika egiteko moduaren ezaugarri garrantzitsu bat. Estruktura matematiko desberdinek funktorialki elkarreragiten dutela diogu eta horretan datzala matematikaren zati nagusi batzuen batasunaren azalpen berri posible bat. Eraikuntzaren metafora alde batera lagata, funktorialki lotutako estruktura desberdinez osatutako irudi berrira pasatzea da proposatzen duguna. Funktoreek transmititzen dute informazioa egitura batetik bestera. Matematikaren ordenatze printzipioa funktoreen "grafoan" aurkitu behar da, gogoan izanda grafo hori ebolutiboa dela. Ikuspegi berri honek errepresentatuko luke guk *funtzionalismo estrukturalista* deitzen dugun matematikaren "barne oinarrien" inguruko posizioa. Era honetako matematikaren ikuspegi batetatik guztiz zentzugabea bihurtzen da matematika osoa kontzeptu eta metodo gutxi batzuetara erreduzitzeko ahalegin Bourbakitarra. Bourbakiren estrukturek oso garrantzitsuak izaten jarraitzen dute matematikaren barne antolaketarako baina ez dute osatzen, hauek esan bezala, matematikaren printzipio ordenatzailea.

Bada gaur egungo matematika ulertzeko orduan, Bourbakiren ahaleginari ihes egiten dion osagairen bat. Eta gure ustetan Mac Lanek, berak, ondo azaltzen du 1995ean estruktura matematikoei eskainitako artikuluan:

> Baina 'morfismoaren' nozioa garrantzitsua da. Bai Bourbakik eta bai beste askok beti jarri izan zioten galdera zentral bat edozein asmakuntza matematiko berriri: 'Zeintzuk dira morfismoak?' Estrukturek modu saihestezinean eramaten dute morfismoetara bai Bourbakiren kasuan eta bai beste edozeinenean.[84]

Morfismoak estrukturei lotuta agertzeaz gain, teorien estrukturazio kontzeptualean ezin ahaztuzkoak direla esaten du Mac Lanek. Eta Bourbakik berak, ez zituela inoiz ahazten. Adibide bat ere jartzen du segidan, azpimarra morfismoetan eta hauek osatzen dituzten estruktura aljebraikoetan jartzeak ekarri izan duen teoria baten ulermen sakona erakusteko. Espazio bektorialak axiomatikoki estruktura aljebraiko

[84]But the notion of 'morphism' matters. Bourbaki and many others always put a central question to any new mathematical gadget: 'What are the morphisms?' Structure inevitably leads to morphisms for Bourbaki and everyone else. [Mac Lane 1996b, 181. or.].

bezala definitu ostean, hauen arteko funtzioetaz, transformazio linealetaz[85] arduratu izanak, ordura arte ondo ulertu ezinik zebiltzan matrizeen arteko kalkuluak, zegokien lekuan jartzeko balio izan zuen: matrizeak, behin jatorri eta helburu espazioetan oinarri bana finkatuta, transformazio linealak oinarri hauekiko adierazteko balio zuten.

Morfismo, gezi, aplikazio, transformazio, funtzio, funktore,... izen desberdin asko jaso ditu ideia emankor berberak. Funtzionalismo estrukturalistaren proposamenak ideia hau (hauek) hartzen du bere ikusmoldearen gune bezala.

[85]Espazio bektorialetako bi eragiketak gordetzen dituzten aplikazioak, hain zuzen ere.

Amaitzeko

Funtzionalismo estrukturalistak ez du matematika eraikuntza bat bezala ikusten: zerrendatutako oinarrizko kontzeptu eta propietate batzutatik erregela logikoak jarraituz deduzitu daitezkeen proposizio multzo bat bezala. Gaur egungo matematikaren batasuna ezin da oinarri komun horretan bilatu esparru matematiko desberdinen aniztasuna kontutan hartuta. Matematikaren zati desberdin askoren artean aurkitu izan diren ustegabeko erlazio sakonek agerian jartzen dute, ordea, jatorrizko kontzeptu komunetan beharrean, zati desberdinok harremanetan jartzen dituzten funktore horietan bila daitekeela matematikaren balizko batasun hori. Esparru desberdinak daude matematikan. Batzuk elkarren artean oso desberdinak barne antolaketari dagokionean. Hala ere esparru hauetako asko estrukturatu egin daitezke, horretarako kasuan kasuko printzipio ordenatzailea emango duten kontzeptu artikulatzaileen inguruan. Historikoki ikusi izan da esparruak estrukturatzeko funtzio pertinenteen estrukturak erabakiorrak suertatzen direla askotan zentzu honetan. Modu honetan estrukturatutako esparru desberdinak funktorialki erlazionatzen dira, problemen ebazpenerako eta teorien garapenerako informazio fluxu eraginkorrak bideratuz. Gaur egungo matematikan erlaziorik gabeak kontsideratzen ziren bi esparruren arteko funktore esanguratsuak definitzeak aurrerapauso handiak ekartzen ditu maiz. Estruktura matematiko desberdinen arteko erlazio funktorialen "grafo" ebolutiboa da eraikuntzaren metafora zaharra ordezkatzeko proposatzen duguna. Etengabe eraikitzen ari den matematikaren "grafoak" erakutsiko du, izatekotan ere, matematika zenbateraino batua kontsidera daitekeen.

Bibliografia

[Awodey 1996] S. Awodey (1996), "Structure in mathematics and logic: a categorical perspective". Philosophia Mathematica **4**(3): 209–237.

[Awodey 2004] S. Awodey (2004), "An answer to Hellman's question: 'Does category theory provide a framework for mathematical structuralism?"'. Philosophia Mathematica **12**(1): 54–64.

[Awodey 2007] S. Awodey (2007), *Category Theory*. Oxford: Oxford University Press.

[Awodey & Warren 2009] S. Awodey & M.A. Warren (2009). Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **146**: 45–55.

[Benacerraf 1965] P. Benacerraf (1965), "What numbers could not be". Philosophical Review **74**: 47–73.

[Berkeley 1734] G. Berkeley (1734), "The analyst". A.C. Fraser (arg.) (1901)-en berrargitaratua: *Works*. 4 bolumen. Oxford.

[Bewersdorff 2004] J. Bewersdorff (2004), *Algebra fur Einsteiger*. 2. Auflage (2. arg.). Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag.

[Birkhoff & Bennett 1988] G: Birkhoff & M.K. Bennett (1988), "Felix Klein and His "Erlanger Programm"". In W. Asprey & P. Kitcher (arg.), *Minnesota Studies in Philosophy of Science. Vol. 11*. Minneapolis, MN: Minnesota University Press, 145–176.

[Birkhoff 1935] G.H. Birkhoff (1935), "On the Structure of Abstract Algebras". Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **31**: 433-454.

[Bolyai 1832] J. Bolyai (1832), "Appendix Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens". In F. Bolyai *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducendi*. Liburu honen eranskin moduan argitaratu zen. Maros-Vasarhelyini, gaur egungo Errumania: Typis Collegii Reformatorum per Josephum, et Simeonem Kali de felso Vist. Ingelesezko itzulpena in: E.D. Smith (arg.), *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill (1929).

[Borel 1998] A. Borel (1998), "Twnty-Five Years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973". Notices of the American Mathematical Society **45**(3): 373-380.

[Bourbaki 1939-] N. Bourbaki (1939-), *Elements de mathematique*. 10 bol.. Paris: Hermann.

[Bourbaki 1948] N. Bourbaki (1948), "L'arquitecture des mathematiques". In F. Le Lionnais et al., *Les grands courants de la pensee mathematique*. Paris: Cahiers du Sud. Ingelesezko itzulpena: A. Dresden (1950), "The Architecture of Mathematics". The American Mathematical Monthly **57**(4): 221-232.

[Bourbaki 1949] N. Bourbaki (1949), "The Foundations of Mathematics". Journal of Symbolic Logic **14**: 1–18.

[Bourbaki 1974] N. Bourbaki (1974), *Elements d'histoire des mathematiques*. Nouvelle edition augmentee. Paris: Hermann.

[Boyer 1959] C.B. Boyer (1959), *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover.

[Brouwer 1925-1927] L.E.J. Brouwer (1925), "Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I". Mathematische Annalen **93**: 244–257. (1926), "Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik II". Mathematische Annalen **95**: 453-472. (1927), "Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik III". Mathematische Annalen **96**: 451-488.

[Cajori 1974] F. Cajori (1974), *A History of Mathematical Notations*. Vol 1: *Notations in Elementary Mathematics*. La Salle, IL: Open Court.

[Cantor 1895-1897] G. Cantor (1895), Mathematische Annalen **46**: 481–512. (1897), Mathematische Annalen **49**: 207–246. Ingelesezko itzulpena P.E.B. Jourdain (1915): *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* Cantorren bi artikuluak jasotzen dira. New York: Dover.

[Cartan 1939] E. Cartan (1939), *Selecta jubile Scientifique*. Paris: Gauthier.

[Cartan 1974] E. Cartan (1974), *Notice sur les travaux scientifiques. Discours de la methode*. Paris: Gauthier-Villars.

[Cartan & Eilenberg 1956] H. Cartan & S. Eilenberg (1956), *Homological Algebra*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[Cartier 1998] P. Cartier (1997-1998), *Notes sur l'histoire et la philosophie des mathematiques*. I. *Vie et mort de Bourbaki*. II. *La creation des noms mathematiques: l'exemple de Bourbaki*. III. *Le structuralisme en mathematiques: mythe ou realite?*. Paris: Preprints of the I.H.E.S.

[Coolidge 1940] J.L. Coolidge (1940), *A history of geometrical methods*. Oxford University Press.

[Corry 1996] L. Corry (1996), *Modern algebra and the rise of mathematical structures*. Basel-Boston-Berlin: Birkhausser.

[Dedekind 1872] R. Dedekind (1872), *Stetigkeit und irrationale zahlen*. Braunschweig. Berrargitalpena: *Werke* 3. bol., 315-334. Ingelesezko itzulpena in: W.W. Beman (1901): Essays on the Theory of Numbers. New York: Dover.

[Dedekind 1888] R. Dedekind (1888), *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Braunschwig. Berrargitalpena: *Werke* 3. bol., 335-391. Ingelesezko itzulpena in: W.W. Beman (1901): Essays on the Theory of Numbers. New York: Dover.

[Dedekind 1901] R. Dedekind (1901), *Uber die Permutationen des Korpers aller aljebraischen Zahlen*. B.L. van der Waerdenen hitzaurrea. Braunschwig.

[Dieudonne 1970] J. Dieudonné (1970), *The Work of Nicolas Burbaki*, American Mathematical Monthly **77**, 134–145.

[Dieudonne 1974] J. Dieudonné (1974), *Course de geometrie algebrique I*. Paris: Presses Universitaires de France.

[Dieudonne 1979] J. Dieudonné (1979), "The Difficult Birth of Mathematical Structures.(1840-1940)". In U. Mathieu & P. Rossi (arg.), *Scientific Culture in Contemporary World*. Milan: Scientia, 7–23 or.

[Dieudonne 1982] J. Dieudonné (1982), "The Work of Bourbaki in the Last Thirty Years". Notices of the American Mathematical Society **29**: 618–623.

[Dieudonne 1987] J. Dieudonné (1987), *Pour l'honneur de l'esprit humain. les mathematiques ajourd'hui*. Paris: Hachette.

[do Carmo 1976] M.P. do Carmo (1976), *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

[Dunham 1999] W. Dunham (1999), *Euler: The master of Us All*. The Mathematical Association of America.

[Edwards 1984] H.M. Edwards (1984), *Galois Theory*. Springer-Verlag.

[Eilenberg & Mac Lane 1945] S. Eilenberg & S. Mac Lane (1945), "General theory of Natural Equivalences". Transactions of the American Mathematical Society **28**: 231–294.

[Feferman 1977] S. Feferman (1977), *Categorical foundations and foundations of category theory*. In Logic Foundations of Mathematics and Computability Theory (Proc. Fifth Internat. Congr. Logic, Methodology and Philos. of Sci., Univ. Western Ontario, London, Ont., 1975), Part I, vol. 9. Univ. Western Ontario Ser. Philos. Sci.: 149–169 or. Dordrecht, Herbeherak: Reidel.

[Feferman 2006] S. Feferman (2006), "Enriched Stratified Systems for the Foundations of Category Theory". In G. Sica (arg.), *What is Category Theory?*. Milan: Polimetrica, 185–204 or.

[Feferman 2009] S. Feferman (2009), "Operational set theory and small large cardinals". Information and Computation **207**: 971–979.

[Feferman 2013] S. Feferman (2012), "Foundations of Unlimited Category Theory: What Remains to Be Done". *The Review of Symbolic Logic* **6**(1): 6–15.

[Ferreiros 1999] J. Ferreirós (1999), *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Bassel-Boston-Berlin: Birkhausser.

[Ferreiros 2005] J. Ferreirós (2005), "Dogmas and the Changing Images of Foundations". Philosophia Scientiae, cahier special: 27–42.

[Ferreiros 2008] J. Ferreirós (2008), "The Crisis in the Foundations of Mathematics". In T. Gowers (arg.), *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton, NJ.: Princeton University Press, 142–156 or.

[Ferreiros & Gray 2006] J. Ferreirós & J. Gray (arg.) (2006), *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.

[Frege 1879] G. Frege (1879), *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: Louis Nebert. Ingelesezko itzulpena: van Heijenoort (1967), 1–82 or.

[Frege 1884] G. Frege (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau: Koebner.

[Frege 1893-1903] G. Frege (1893), (1903) *Grundgesetze der Arithmeik*, 2 bol., Olms: Hildescheim.

[Frege 1976] G. Frege (1976), *Wissenschaftlicher Briefweschel*. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, eta C. Thiel (arg.). Hamburgo: Felix Meiner. Ingelesezko itzulpena: (1980). Oxford: Basil Blackwell.

[Friederich 2010] S. Friederich (2010), "Structuralism and Meta-Mathematics". Erkenntnis **73**: 67–81.

[Galois 1846] E. Galois (1846), "Oeuvres mathematiques d'Evariste Galois". J. Liouvillen (arg.) hitzaurrea. Journal de mathematiques pures et appliquees **XI**(1): 381–444.

[Geach & Black 1980] P. Geach & M. Black (1980), *Translations From the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Oxford: Basil Blackwell.

[George & Velleman 2002] A. George & D.J. Velleman (2002), *Philosophies of Mathematics*. Oxford: Blackwell.

[Gillies 1982] D.A. Gillies (1982), *Frege, Dedekind, and Peano on the Foundations of Arithmetic*. Assen, Herbehereak: Van Gorcum.

[Gonzalez 2004] P.M. González (2004), *Los orígenes de la geometría analítica*. La Orotava, Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

[Grattan-Guiness 1980] I. Grattan-Guinness (et al.), *From the Calculus to Set theory, 1630-1910. An Introductory History*.

[Greenberg 1980] M.J. Greenberg (1980), *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. 2. argitalpena. New york: W.H. Freeman.

[Groethendieck 1957] A. Groethendieck (1957), "Sur quelques points d'algèbre homologique, I". Tohoku Mathematical Journal **9**(2):119-121.

[Hatcher 2002] A. Hatcher (2002), *Algebraic Topology*. New York: Cambridge University Press.

[Hawkins 1984] T. Hawkins (1984), "The *Erlanger Programm* of Felix Klein: Reflections on Its Place in the History of Mathematics". Historia Mathematica **11**: 442-470.

[Heck 1993] R.G. Heck (1993), "The Development of Arithmetic in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*". The Journal of Symbolic Logic **58**: 579-601.

[Hellman 1989] G. Hellman (1989), *Mathematics Without Numbers*, Oxford: Oxford University Press.

[Hellman 2001] G. Hellman (2001), *Three Varieties of Mathematical Structuralism*, Philosophia Mathematica **9**(3): 184–211.

[Hellman 2003] G. Hellman (2003), *Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?*, Philosophia Mathematica **11**(3): 129–157.

[Hellman 2005] G. Hellman (2005), *Structuralism*. In S. Shapiro (arg.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. New York: Oxford University Press, 536–562 or.

[Hellman & Bell 2006] G, Hellman & J.L. Bell (2006), "Pluralism and the foundations of mathematics". In S.H. Kellert, H.E. Longino and C.K. Waters (arg.), *Scientific Pluralism*. Minnesota studies in the philosophy of science. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press, 64–79 or.

[Hermida, Makkai & Power 2000] C. Hermida, M. Makkai & J. Power (2000), "On weak higher dimensional categories", I.1. Journal of Pure and Applied Algebra, **154**: 221-246.

[Hermida, Makkai & Power 2001] C. Hermida, M. Makkai & J. Power (2001), "On weak higher dimensional categories", I.2. Journal of Pure and Applied Algebra, **157**: 247-277.

[Hermida, Makkai & Power 2002] C. Hermida, M. Makkai & J. Power (2002), "On weak higher dimensional categories", I.3. Journal of Pure and Applied Algebra, **166**: 83-104.

[Hersh 1997] R. Hersh (1997), *What Is Mathematics, Really?*. Oxford: Oxford University Press.

[Hilbert 1899] D. Hilbert (1899), *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner. Gaztelerazko itzulpena (1953). Madril: Instituto "Jorge Juan" de Matematicas.

[Hilbert 1900] D. Hilbert (1900), *Über den Zahlenbegriff*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereiningung **8**: 180-184.

[Hilbert 1905] D. Hilbert (1905), *Logische Principien des matematischen Denkens*. Ms. Vorlesung SS 1905. E. Hellinger-en iruzkinekin. Gottingen: Bibliothek des Mathematischen Seminars der Universitaat Gottingen.

[Hilbert 1927] D. Hilbert (1927), "Die Grundlagen der Mathematik". *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universitaat* **6**(1): 65–85. Ingelesezko itzulpena: van Heijenoort (1967): 464–479 or.

[Hilbert & Bernays 1934-1939] D. Hilbert & P. Bernays (1934), (1939), *Grundlagen der Mathematik* 2 bol., Berlin: Springer.

[Kan 1958] D.M. Kan (1958), "Adjoint Functors", Transactions of the American Mathematical Society **87**(2): 294–329

[Kiernan 1971] B.M. Kiernan (1971), “The development of Galois theory from Lagrange to Artin”, *Archive for the History of Exact Sciences* **8**: 40–154.

[Klein 1872] F. Klein (1872), *Vergleichende Betrachtungen uber neuere geometrische Forschungen*. Erlangen. M.W. Haskell-en ingelesezko itzulpena (1892): *Bull. New York Math. Soc.* **2**: 215–249.

[Klein 1908] F. Klein (1908), *Elementarmathematik vom hoheren Standpunkte aus*. Leipzig.

[Kline 1972] M. Kline (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford university Press.

[Kneebone 1963] G.T. Kneebone (1963), *Mathematical Logic and the foundations of mathematics*. London: Van Nostrand.

[Kunen 2010] K. Kunen (2010), *The Foundations of Mathematics*. London: College Publications.

[Landry & Marquis 2005] E. Landry & J.P. Marquis (2005), “Categories in Context: Historical, Foundational and Philosophical”. Philosophia Mathematica **13**(3): 1–43.

[Lang 1965] S. Lang (1965), *Algebra*. Reading: Adisson-Wesley.

[Lawvere 1963] F.W. Lawvere (1963), *Functorial Semantics of Algebraic Theories*. Doktorego Tesia. New York: Columbia University.

[Lawvere 1964] F.W Lawvere (1964), “An elementary theory of the category of sets”. Proceedings of the National Academy of Science of the U.S.A. **52**, 1506–1511.

[Lawvere 1966] F.W. Lawvere (1966), “The Category of Categories as a foundation of Mathematics”. Proc. Conference Categorical Algebra (La Jolla1965). New York: Springer, 1–20.

[Lawvere 2003] F.W. Lawvere (2003), “Foundations and Applications: Axiomatization and Education”. Bulletin of Symbolic Logic **9**: 213–224.

[Lawvere & Rosebrugh 2003] F.W. Lawvere & R. Rosebrugh (2003), *Sets for Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

[Lobachevsky 1829] N. Lobachevsky (1829). Ingelesezko itzulpena in: E.D. Smith (arg.), *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill (1929).

[MacBride 2005] F. MacBride (2005), “Structuralism Reconsidered”. In S. Shapiro (arg.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. New York: Oxford University Press, 563–589 or.

[Mac Lane 1980] S. Mac Lane (1980), “The Genesis of Mathematical Structure in the Work of Charles Ehresmann”. *Cahiers de topologie et geometrie differentielle categoriques* **21**(4): 353–365.

[Mac Lane 1986] S. Mac Lane (1986), *Mathematics: Form and Function*. New York: Springer-Verlag.

[Mac Lane 1992] S. Mac Lane (1992), “The Protean Character of Mathematics”. In J. Echeverria et al. (arg.), *The Space of Mathematics*. Berlin: de Gruyter, 3–13. or.

[Mac Lane 1996a] S. Mac Lane (1996a), “Categorical Foundations of the Protean Character of Mathematics”. In E. Agazzi & G. Darvas (arg.). *Philosophy of Mathematics Today*. Dordrecht: Kluwer, 117–122. or.

[Mac Lane 1996b] S. Mac Lane (1996b), “Structure in Mathematics”. Philosophia Mathematica **4**(2): 174–183.

[Mac Lane 1997] S. Mac lane (1997), “Van der Waerden’s *Modern Algebra*”. Notices of the American Mathematical Society **44**(3):321–322.

[Mac Lane 1998] S. Mac Lane (1998), *Categories for the Working Mathematician*. 2. argitarapena. New York: Springer-Verlag.

[Mac Lane 2000] S. Mac Lane (2000), "Contrary statements about mathematics. Comment: Strong Statements of analysis". *Bulletin of the london mathematical Society* **32**: 527.

[Mac Lane & Moerdijk 1992] S. Mac Lane & I. Moerdijk (1992), *Sheaves in Geometry and Logic: A first Introduction*. New York: Springer-Verlag.

[Maddy 1997] P. Maddy (1997), *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

[Makkai 1997a] M. Makkai (1997a), "Generalized sketches as a framework for completeness theorems.I". *Journal of Pure and Applied Algebra* **115**: 49–79.

[Makkai 1997b] M. Makkai (1997b), "Generalized sketches as a framework for completeness theorems.II". *Journal of Pure and Applied Algebra* **115**: 179–212.

[Makkai 1997c] M. Makkai (1997c), "Generalized sketches as a framework for completeness theorems.III". *Journal of Pure and Applied Algebra* **115**: 241–274.

[Makkai 1998] M. Makkai (1998), "Towards a categorical foundation of mathematics". In J.A. Makowski & E.V. Ravve (arg.), *Logic Colloquium '95 (Haifa)*. Lecture Notes in Logic 11. Berlin: Springer, 153–190 or.

[Marin 2006] A. Marín (2006), *Incognitas, variables y otros fantasmas matemáticos. El lenguaje de la variación y la covariación numéricas*. Iruea: Nafarroako Unibertsitate Publikoa.

[Marquis 1995] J.P. Marquis (1995), "Category Theory and the Foundations of Mathematics: Philosophical Excavations". *Synthese* **103**: 421–447.

[Marquis 2009] J.P. Marquis (2009), *From a Geometrical Point of View. A Study of the history and philosophy of Category Theory*. Springer.

[Marquis 2013] J.P. Marquis (2013) "Categorical Foundations of Mathematics or How to Provide Foundations for *Abstract* Mathematics". *The Review of Symbolic Logic*, **6**(1): 51–75.

[Mashaal 2002] M. Mashaal (2002), *Bourbaki: Une societe secrete de mathematiciens*. Paris: Editions Pour la Science. A. Pierrehumberten ingelesezko itzulpena (2006), Providence, RI: American mathematical Society.

[McLarty 1991] C. Mclarty (1991), "Axiomatizing a category of categories". *Journal of Symbollic Logic* **56**: 1243–1260.

[McLarty 1992] C. Mclarty (1992), *Elementary categories, elementary toposes*. Oxford: Oxford University Press.

[McLarty 1993] C. McLarty (1993), "Numbers Can Be Just What They Have To". *Nous* **27**(4): 487–498.

[McLarty 2004] C. McLarty (2004), "Exploring Categorical Structuralism". *Philosophia Mathematica* **12**(1): 37–53.

[McLarty 2005] . McLarty (2005), "Learning from Questions on Categorical Foundations". *Philosophia Mathematica* **13**(1): 44–60.

[McLarty 2006] C. McLarty (2006), "Saunders Mac lane and the Universal in Mathematics". *Scientiae mathematicae Japonicae* **19**: 25–28.

[McLarty 2008] C. McLarty (2008), "What Structuralism Achieves". In P. Mancosu (arg.), *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press.

[McLarty 2011] C. McLarty (2011), "Recent Debate Over Categorical Foundations". In G. Sommaruga (arg.), *Foundational Theories of Classical and Constructive Mathematics*, The Western Ontario Series in Philosophy of Science 76. Springer, 145–154 or.

[McLarty 2013] C. McLarty (2013), "Foundations As Truths Which Organize Mathematics". *The Review of Symbolic Logic* **6**(1): 76–86.

[Mendelson 1964] E. Mendelson (1964), *Introduction to Mathematical Logic*. New York: Van Nostrand.

[Ore 1935] O. Ore (1935), "On the Foundations of Abstract Algebra, I". Annals of Mathematics **36**: 406-437.

[Ore 1936] O. Ore (1936), "On the Foundations of Abstract Algebra, II". Annals of Mathematics **37**: 265-292.

[Parsons 1990] C. Parsons (1990), *The Structuralist View of Mathematical Objects. Synthese* **84**: 303–346.

[Quine 1970] W.V. Quine (1970), *Philosophy of Logic*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[Reck 2003] E. Reck (2003), "Dedekind's Structuralism: An Interpretation and Partial Defense". *Synthese* **137**: 369-419.

[Reck 2011] E. Reck (2011), "Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics". *Stanford Encyclopedia of Phylosophy.*

[Reck & Price 2000] E. Reck & Price M. (2000), "Structures and Structuralism in Contemporary Philosophy of Mathematics". *Synthese* **125**: 341–383.

[Resnik 1981] M. Resnik (1981), "Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference". *Nous* **15**: 529–550.

[Resnik 1982] M. Resnik (1982), "Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology". *Nous* **16**: 95–105.

[Resnik 1997] M. Resnik (1997), *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Oxford University Press.

[Riemann 1867] B. Riemann (1867), “Ueber die Hypothesen, Welche der Geometrie zu Grunde liegen”. In R. Dedekind (arg.) (1867) *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13. bol..

[Russell 1903] B. Russell (1903), *The Principles of Mathematics*. Cambridge: University Press.

[Russell 1908] B. Russell (1908), “Mathematical Logic as Based on the Theory of Types”. *American Journal of Mathematics* **30**: 222-262. J. Van Heijenoort (1967)-an berrargitaratua: 152-182.

[Schwartz 1997] L. Schwartz (1997), *Un mathematicien aux prises avec le siecle*. Paris: Odile Jacob. L. Schneps-en ingelesezko itzulpena (2001). Basel-Boston-Berlin: Birkhauser.

[Shapiro 1983] S. Shapiro (1983), “Mathematics and Reality”. *Philosophy of Science* **50**: 523–548.

[Shapiro 1997] S. Shapiro (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. New York: Oxford University Press.

[Shapiro 2000] S. Shapiro (2000), *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics*, New York: Oxford University Press.

[Shapiro 2004] S. Shapiro (2004), “Foundations of Mathematics: Metaphysics, Epistemology, Structure”. *The Philosophical Quarterly* **54**: 16–37??

[Shapiro 2005] S. Shapiro (2005), “Categories, Structures, and the Frege-Hilbert Controversy: The Status of Meta-mathematics”. *Philosophia Mathematica* **13**(1): 61–77.

[Shapiro 2011] S. Shapiro (2011), “Foundations: Structures, Sets, and Categories”. In G. Sommaruga (arg.), *Foundational Theories of Classical and Constructive*

Mathematics, The Western Ontario Series in Philosophy of Science 76. Springer, 97–110 or.

[Sharpe 1997] R.W. Sharpe (1997), *Differential Geometry. Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*. Springer.

[Simpson 1988] S.G. Simpson (1988), "Partial Realizations of Hilbert's Program". Journal of Symbolic Logic **53**: 349–363.

[Soicher & McKay 1985] L. Soicher & J. McKay (1985), "Computing Galois groups over the rationals". Journal of Number Theory **20**: 273–281.

[Stein 1988] H. Stein (1988), "Logos, *Logic*, and Logistike: Some Philosophical Remarks on Nineteenth-Century Transformation of Mathematics". In W. Asprey & P. Kitcher (arg.), *Minnesota Studies in Philosophy of Science. Vol. 11*. Minneapolis, MN: Minnesota University Press, 238–259.

[Troelstra 1994] A.S. Troelstra (1994), "History of Constructivism in the Twentieth Century". *The ITLI Prepublications Series*. University of Amsterdam.

[Tignol 2001] J.P. Tignol (2001), *Galois' Theory of Algebraic Equations*. World Scientific.

[Van der Waerden 1930-1931] B.L. van der Waerden (1930-1931), *Moderne Algebra*. 1. argitalpena. 2 bol.. Berlin: Springer.

[Van der Waerden 1985] B.L. Van der Waerden (1985), *A History of Algebra from Al Kharisme to Emmy Noether*. Berlin: Springer.

[Van Heijenoort 1967] J. Van Heijenoort (1967), *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

[Weinberg 1986] S. Weinberg (1986), "Mathematics: the unifying thread in science". Hitzaldi baten transkripzioa. *Notices of the American Mathematical Society* **XXXIII** (Urria): 716–733.

[Whitehead & Russell 1910-1913] A.N. Whitehead & B. Russell (1910), (1912), (1913), *Principia Mathematica* 3 bol., Cambridge: University Press.

[Wright 1983] C. Wright (1983), *Frege's conception of numbers as objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press.

[Wussing 1969] H. Wussing (1969), *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. A. Shenitzer-en ingelesezko itzulpena (1984). Cambridge, Mass.: The MIT Press.

[Yaglom 1988] I.M. Yaglom (1988), *Felix Klein and Sophus Lie. Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century*. S. Sossinsky-ren ingelesezko itzulpena (1988). Boston: Birkhausser.

[Zermelo 1908] E. Zermelo (1908), "Untersuchungen uber die Grundlagen der Mengenlehre I". Mathematische Annalen **65**: 261–281. Ingelesezko itzulpena In: Van Heijenoort (1967): 199-215.